

# Vanuit Ptolemeus via Kepler naar Newton

Kees Klaassen  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Voorbereid ten behoeve van de Nationale Wiskunde Dagen 2015

## Woord vooraf

Vanwege ziekte ben ik helaas niet in staat geweest een lezing te geven tijdens de Nationale Wiskunde dagen van 2015. Hieronder volgt allereerst het verhaal dat ik zo ongeveer had willen vertellen. Daarna volgt een uitgebreid notenapparaat, waarin ingegaan wordt op vragen die gesteld hadden kunnen worden en tevens enige achtergrond en (wiskundige) verdieping wordt gegeven. Daarna volgen nog enkele artikelen die ik na afloop van de lezing had willen uitdelen.

## 1 Inleiding

Dit verhaal valt onder bij het thema: *Zwaartekracht, de kracht van wiskunde*. Bij dat thema denk ik in eerste instantie toch vooral aan Newtons hoofdwerk: *Wiskundige beginselen van de natuurfilosofie* (Newton, 1999). Enerzijds heeft Newton in zijn *Principia* (zoals zijn hoofdwerk vaak kortheidshalve aangeduid wordt), door de combinatie van zijn *zwaartekrachtstheorie* en zijn *differentiaalrekening* als wiskundig hulpmiddel, een formidabele bijdrage geleverd aan de sterrenkunde, door een verklaring te geven voor de beweging van allerlei hemellichamen in ons zonnestelsel: planeten, manen van planeten, kometen.<sup>1</sup> Anderzijds heeft Newton een norm gesteld waarnaar vele generaties van natuurkundigen na hem zich hebben gevoegd. Newtons mechanica maakt het mogelijk, althans in principe, te bepalen hoe voorwerpen in een gegeven situatie gaan bewegen. Zijn drie bewegingswetten fungeren daarbij als een *algemeen kader*, dat nog aangevuld moet worden met *specifieke krachtwetten* betreffende de invloeden die de specifieke voorwerpen in kwestie op elkaar uitoefenen, zoals de gravitatiewet in het geval van hemellichamen.

Ook al geldt Newtons mechanica tegenwoordig niet meer als het fundament van de natuurkunde, toch blijft ze een lichtend voorbeeld. Naar mijn mening vormt Newtons mechanica een noodzakelijke springplank voor een goed begrip van de kaders die haar vervangen hebben, zoals die van de relativiteitstheorie en de kwantumtheorie.<sup>2</sup> Ik ga het in dit verhaal echter niet hebben over ontwikkelingen sinds Newton. Ik kijk veeleer terug in de tijd naar enkele ontwikkelingen die aan Newton voorafgegaan zijn en die behulpzaam kunnen zijn om Newton beter te begrijpen. Ik richt me daarbij op de context waarin Newtons theorie zijn grootste bekroning heeft gekend: de beweging van hemellichamen, in het bijzonder planeten.

Uit de millennia-lange historie van de bestudering van het *hoe* en *waarom* van de beweging van hemellichamen, wil ik twee wat minder bekende momenten uitlichten: het equantmodel van Ptolemeus (§2) en de fysische sterrenkunde van Kepler (§4). Ik wil laten zien dat dit belangrijke tussenstadia zijn geweest op weg naar Newtons mechanica en zwaartekrachtstheorie.

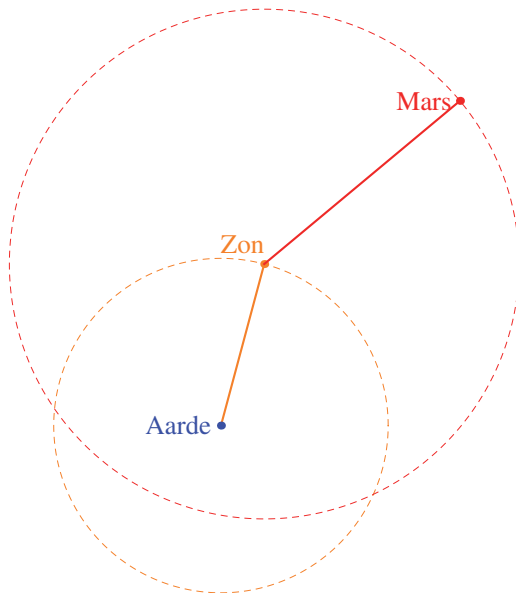
Bij Ptolemeus speelt vooral het *hoe* van de beweging van de planeten een rol, en zijn equantmodel maakt het mogelijk de beweging van planeten zeer nauwkeurig te voorspellen. Kepler, daarentegen, stelt nadrukkelijk ook de *waarom*-vraag en introduceert ter beantwoording daarvan het *kracht*begrip (§3), maar in zijn fysieke sterrenkunde speelt de zwaartekracht geen rol.

Van de relaties tussen de theorieën van Ptolemeus, Kepler en Newton (§3, §5, §6) kan naar mijn mening ook *didactisch* nuttig gebruik gemaakt worden. Ik zal daar gaandeweg (§3.4) en aan het eind (§7) enkele opmerkingen over maken. Het navolgende verhaal is echter meer *historisch* en *conceptueel* dan didactisch van aard.<sup>3</sup>

## 2 Ptolemeus' zoektocht naar gelijkmatige cirkelbewegingen

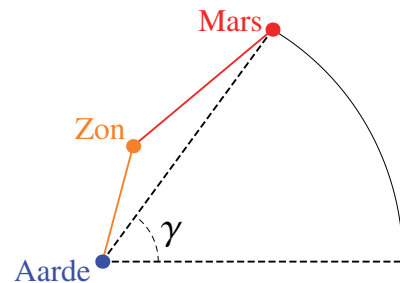
### 2.1 Het epicykelmodel

Ptolemeus werkte binnen het Griekse ideaal om de beweging van hemellichamen te beschrijven met *cirkels* die met *constante snelheid* doorlopen worden.<sup>4</sup> Welbekend zijn Ptolemeus' geocentrische beschrijvingen in termen van een *cykel* ofwel hoofdcirkel en *epicykels* ofwel bijcirkels.

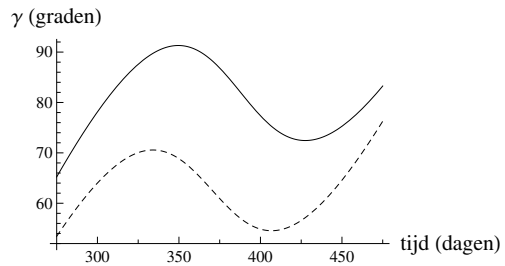
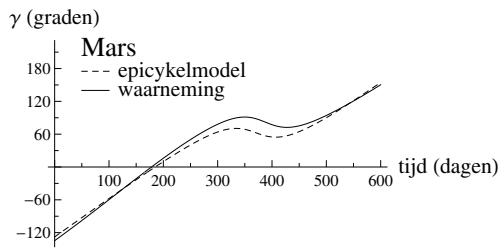


De beweging van een planeet is volgens het epicykelmodel de *superpositie van twee* eenparige cirkelbewegingen: een cirkelbeweging van de zon om de aarde (cykel) en daarop gesuperponeerd een cirkelbeweging van de planeet om de zon (epicykel). Denk dus de zon met een spaak verbonden aan de aarde, en de planeet met een andere spaak aan de zon, en draai vervolgens beide spaken tegelijkertijd gelijkmatig rond (met een verschillende periode). Als Ptolemeus geweten had van de manen van andere planeten, zou hij die ongetwijfeld beschreven hebben met epi-epicykels, dus als een superpositie van *drie* eenparige cirkelbewegingen.

Het is wat minder bekend dat Ptolemeus uit zijn waarnemingen ook al had geconcludeerd dat het epicykelmodel voor sommige planeten niet al te nauwkeurig is. In de figuur rechts staat de direct waarneembare hoek  $\gamma$  gedefinieerd, waaronder de planeet Mars vanuit de aarde wordt waargenomen tegen de achtergrond van de vaste sterren (ten opzichte van een willekeurig gekozen basislijn).



In de grafieken op de volgende pagina staat de voorspelling van het epicykelmodel voor de hoek  $\gamma$  vergeleken met de waarneming. De linkergrafiek geeft het verloop over een periode van 600 dagen weer, waarbij de onderbroken lijn de voorspelling voorstelt en de getrokken lijn de waarneming. De rechtergrafiek geeft een uitvergroet detail.<sup>5</sup>

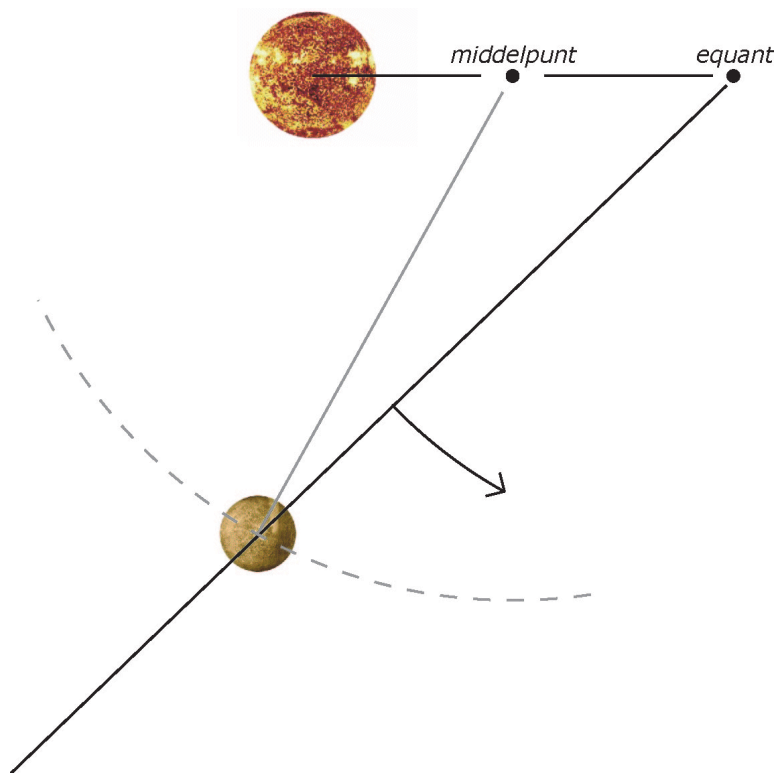


Weliswaar is de door het epicykelmodel voorspelde trend in overeenstemming met de waarneming, maar gedurende langere tijd doen zich aanzienlijke afwijkingen voor die kunnen oplopen tot wel  $25^\circ$ .<sup>6</sup> Blijkbaar is de beweging van de planeten toch niet *precies* een superpositie van exacte eenparige cirkelbewegingen.

## 2.2 Het equantmodel

Om betere overeenstemming te verkrijgen met zijn eigen waarnemingen, heeft Ptolemeus een nieuw model bedacht: het zogenaamde *equantmodel*. Het is een buitengewoon ingenieus model.<sup>7</sup> In het equantmodel heeft Ptolemeus de aanname over de baan van de zon om de aarde gehandhaafd: de zon beweegt *gelijkmatig* in een *cirkel* om de aarde. De veranderingen betreffen de beweging van de planeet om de zon:

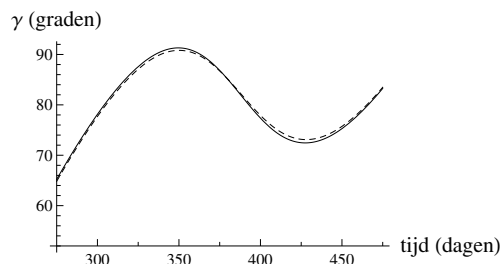
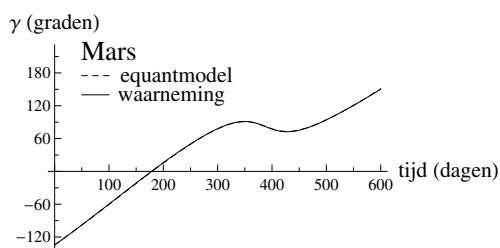
- De baan van een planeet is nog steeds een cirkel, maar de zon staat niet langer in het middelpunt van die cirkel.
- Verder is de hoeksnelheid niet eenparig ten opzichte van de zon, maar wel ten opzichte van de zogenaamde *equant*: het punt dat zich aan de andere kant van het middelpunt bevindt, op een even grote afstand tot het middelpunt als de zon.



Denk de planeet dus met twee spaken verbonden, aan het middelpunt respectievelijk de equant. De planeet is vast verbonden aan het uiteinde van de spaak die met het middelpunt verbonden is, zodat de baan van de planeet inderdaad een cirkel is. De planeet kan vrij bewegen langs de spaak die met de equant verbonden is. De ontdekking van Ptolemeus is dat de beweging van de planeet goed beschreven wordt door de equantspaak *gelijmatig* rond te draaien. De term ‘equant’ is hieraan ook ontleend. Het is een afkorting van *punctum equans*: *het gelijkmatig makende punt*, ook wel *vereffeningpunt* genoemd.

Hoe bedenkt iemand zoiets? Ptolemeus zelf merkt hierover alleen maar op dat hij tot het equantmodel is gekomen “from a long period of trial and application” (Ptolemy, 1998, pagina 422). *Trial and error*, dus, en de aanhouder wint. Uiteraard moeten we ook niet de drijfveer onderschatten om zo goed mogelijk het Griekse ideaal overeind te houden. En hierin is Ptolemeus in belangrijke mate geslaagd: er is nog steeds een superpositie van een hoofdcirkel en een bijcirkel; er zijn nog steeds *eenparige hoekbewegingen*. Maar de drijfveer om aan het Griekse ideaal te voldoen heeft wel zijn prijs gehad. De zon heeft in de bijcirkel letterlijk de centrale rol verloren die ze in het epicykelmodel nog wel had. In het hele equantmechanisme speelt de zon zelfs geen enkele rol. De zon staat er, zogezegd, voor de sier bij.

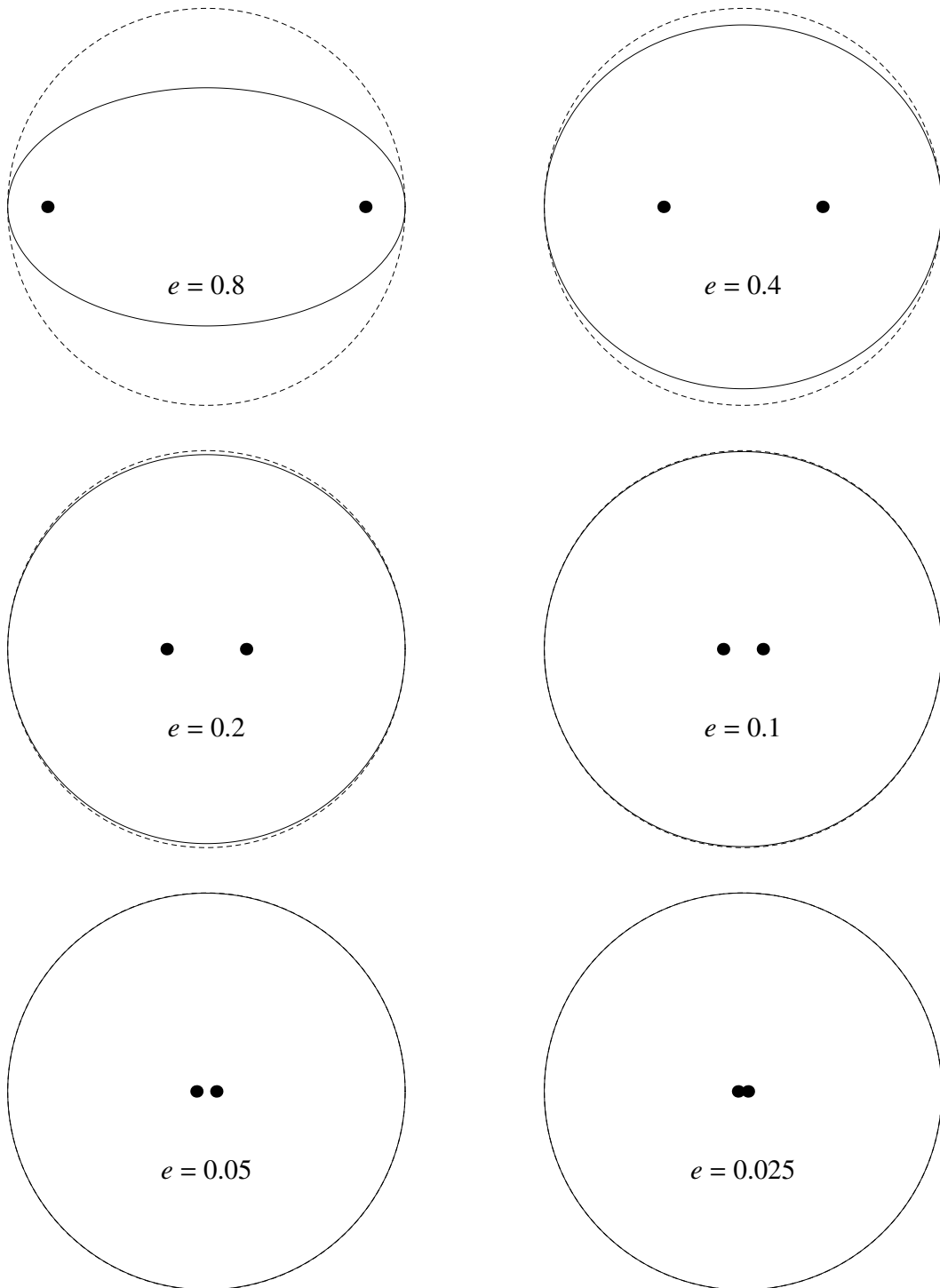
Het equantmodel is bijna perfect in overeenstemming met de waarnemingen, zeker met de blote-oog waarnemingen waarmee Ptolemeus zich moest behelpen. In de grafieken staat, voor de hoek  $\gamma$  van de planeet Mars, de vergelijking tussen waarneming en voorspelling van het equantmodel weergegeven.<sup>8</sup> Waar het epicykelmodel nog sterk afweek van de waarneming, wijkt het equantmodel hooguit een halve graad af.



### 2.3 Waarom werkt het equantmodel zo goed?

Misschien is het nuttig hier even in te gaan op een mogelijke tegenwerping die u ervan zou kunnen weerhouden te accepteren dat het equantmodel zo goed werkt voor de planeten in ons zonnestelsel. Volgens Ptolemeus is de baan van een planeet een *cirkel*. Maar klopt dit wel? We hebben toch van Kepler en Newton geleerd dat de baan veeleer een *ellips* is, waarbij de zon in één van de brandpunten staat. Toegegeven, een cirkel is ook een ellips, namelijk een ellips waarbij de brandpunten samenvallen in het middelpunt van de cirkel. Maar volgens Ptolemeus staat de zon nou juist *niet* in het middelpunt. Hoe kan dit?

Het antwoord is dat er geen tegenspraak is. Op de volgende pagina staan enkele ellipsen weergegeven, met een afnemende eccentriciteit  $e$ . Tevens is met een onderbroken lijn steeds de cirkel weergegeven die hetzelfde middelpunt heeft als de ellips en de halve lange as als straal. De figuren illustreren dat als de eccentriciteit van een ellips niet al te groot is (zeg niet groter dan 0,1), dat dan de brandpunten nog duidelijk zichtbaar van elkaar verwijderd kunnen staan terwijl de ellips op het oog al niet meer te onderscheiden is van een cirkel.



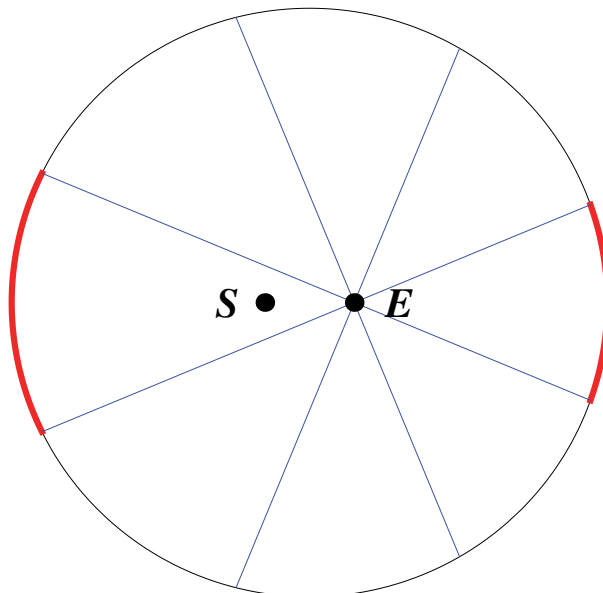
U voelt het al aankomen. De banen van de planeten in ons zonnestelsel hebben een kleine tot zeer kleine eccentriciteit. In de tabel staan de eccentriciteiten weergegeven van de vijf planeten die Ptolemeus kende. Een meer precieze analyse leert dat het equantmodel correct is tot en met de eerste orde in de eccentriciteit.<sup>9</sup> Afwijkingen zijn van de orde  $e^2$ , en voor de meeste planeten in ons zonnestelsel verwaarloosbaar.<sup>10</sup>

Planeet	Eccentriciteit
Mercurius	0,206 ( $\sim \frac{1}{5}$ )
Venus	0,007 ( $\sim \frac{1}{147}$ )
Mars	0,093 ( $\sim \frac{1}{11}$ )
Jupiter	0,048 ( $\sim \frac{1}{21}$ )
Saturnus	0,056 ( $\sim \frac{1}{18}$ )

## 2.4 Eigenschappen van de planeetbeweging

Ik wil nog twee eigenschappen noemen van de planeetbeweging, waarop ik in het vervolg regelmatig terug zal komen: de afstand *en* de snelheid van de planeet variëren (hoe dichterbij de zon, des te groter de snelheid). Met behulp van het equantmodel is dit eenvoudig in te zien.

- De afstand van de planeet tot de zon varieert.  
Dit is evident: de zon staat niet in het middelpunt van de baan van de planeet.
- De snelheid van de planeet varieert.  
In de figuur staan vanuit de equant gelijke hoeken weergegeven. Volgens het equantmodel worden die dus in gelijke tijden doorlopen. De rood weergegeven cirkelbogen, bijvoorbeeld, doorloopt de planeet dus ook in gelijke tijden. De planeet beweegt sneller naarmate deze zich dichterbij de zon bevindt.



## 3 Keplers zoektocht naar een *oorzakelijke* verklaring voor de beweging van de planeten

### 3.1 Het equantmodel geeft geen antwoord op de *waarom*-vraag

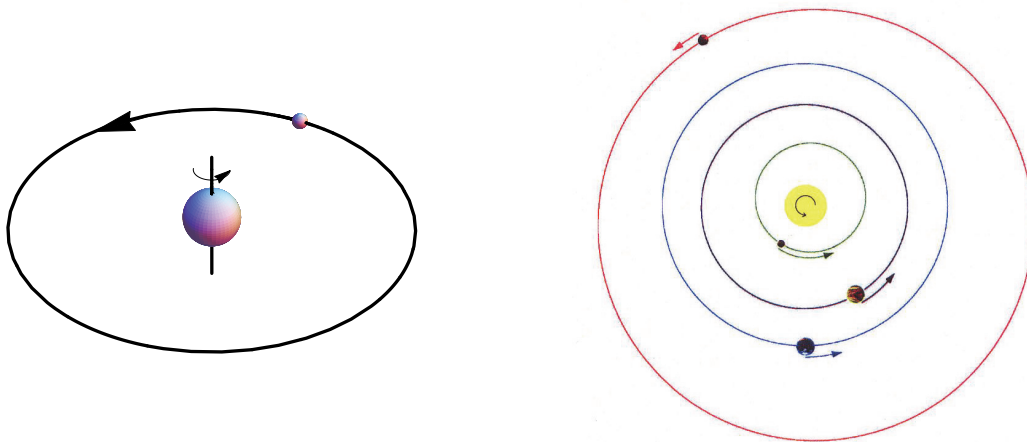
Kepler was enorm onder de indruk van het equantmodel van Ptolemeus, en hoe goed hiermee de bewegingen van de planeten voorspeld kunnen worden. Toch was Kepler niet helemaal tevreden met dit model. Wat er volgens hem aan ontbrak was . . . *een oorzaak*. Kepler wilde niet alleen weten *hoe* de planeten bewegen, maar ook *waarom* ze zo bewegen. Op de waarom-vraag, echter, geeft het equantmodel geen antwoord. Het equantmodel heeft het over spaken die verbonden zijn met het middelpunt en met de equant. Maar *daar* kan de oorzaak niet gevonden worden. In het middelpunt en in de equant zit in het echt namelijk . . . helemaal niks—het is lege ruimte. Er is dus niks waar de spaken aan vastgemaakt zouden kunnen worden. Er zijn ook helemaal geen spaken.

Het equantmodel mag dan een handig hulpmiddel zijn om te voorspellen hoe een planeet gaat bewegen, maar verder is het volstrekt denkbeeldig. In werkelijkheid is er helemaal niks dat correspondeert met het equantmechanisme. Ptolemeus zou dit waarschijnlijk niet ontkend hebben, maar het deed hem niet. Hij was er zo op gericht aan het Griekse ideaal te vodoen, dat de waarom-vraag niet eens in hem opgekomen is.

### 3.2 Zou de zon de oorzaak kunnen zijn?

Kepler zag eigenlijk maar één serieuze kandidaat als oorzaak voor de beweging van de planeten. Kijk immers eens wat in de buurt staat van al die *denkbeeldige* spaken, equanten en middelpunten: een *echt* ding ... een gigantische ster ... onze zon. Ligt het niet heel erg voor de hand, aldus Kepler, om *daar* de oorzaak te gaan zoeken? Waar in het equantmodel de zon haar centrale rol verloren had, wil Kepler weer een centrale rol toekennen aan de zon: een *dynamische* rol.

Eenmaal op dit spoor raakten Keplers gedachten in een stroomversnelling. Als de zon de oorzaak was van de beweging van de planeten, dan zou dat verklaren waarom een planeet sneller beweegt wanneer deze zich dichterbij de zon bevindt. Hoe dichterbij de bron, hoe groter immers het effect. Een verdere aanwijzing vond Kepler in het feit dat *alle* planeten in *dezelfde* zin om de zon heen lopen. Dat kon volgens hem geen toeval zijn, en moest wijzen op een relevante causale factor in de zon. De volgens hem relevante factor vond hij door ook te kijken naar de beweging van de maan om de aarde (zie links). De richting waarin de maan om de aarde heen loopt is namelijk precies de richting waarin de aarde om haar eigen as draait.



Kepler werd hierdoor geleid tot de hypothese dat ook de zon om haar eigen as draait, en dat de draaizin ervan dezelfde is als de zin waarin alle planeten om de zon heen lopen (zie rechts). Op het moment dat Kepler voor het eerst de hypothese van de rotatie van de zon stelde, in 1609, was hier nog geen direct empirisch bewijs voor. Enkele jaren later echter werden voor het eerst zonnevlekken waargenomen door Galilei en anderen. Uit de waargenomen verplaatsing van de zonnevlekken concludeerde Galilei dat de zon om haar eigen as roteert (zie Galilei (1957) voor een vertaling van fragmenten van Galilei's brieven over zonnevlekken uit 1613). Zeer tot Keplers genoegen stemt de draaizin van de zonnevlekken inderdaad overeen met de omloopszin van de planeten. Dit versterkte Keplers geloof dat de zon, of de rotatie van de zon, de oorzaak is van de beweging van de planeten. Evenzo moet de aarde, of de draaiing van de aarde, de oorzaak zijn van de beweging van de maan.

### 3.3 De geboorte van het fysisch krachtbegrip

Waar u zojuist getuige van bent geweest is niets minder dan de geboorte van het fysisch *kracht*begrip. Het idee, dus, om bewegingen, of aspecten van bewegingen, op te vatten als effecten van oorzakelijke bronnen; het idee, anders gezegd, om bewegingsaspecten op een systematische en consistente manier in verband te brengen:

- met voorwerpen die een invloed uitoefenen, zoals de zon bij de beweging van de planeten (volgens Kepler);
- met dynamisch relevante eigenschappen van die voorwerpen, zoals de rotatie van de zon (volgens Kepler).

Niet Newton is de vader van het fysisch krachtbegrip; Kepler heeft het gedaan.<sup>11</sup> Ik zal deze bewering spoedig nuanceren (zie het eind van §5.1), maar voor het moment handhaaf ik de bewering als een eerbetoon aan Kepler. Naar mijn indruk krijgt hij gangbaar te weinig credit voor deze essentiële innovatie (zie ook Stephenson (1994)).

### 3.4 Didactisch intermezzo

Misschien is dit de juiste plaats om een eerste didactische suggestie te doen, naar aanleiding van Keplers redenering die, startend vanuit kritiek op het equantmodel, geleid heeft tot de geboorte van het fysisch krachtbegrip. De suggestie is om aan de hand van enkele modellen de *hoe*-vraag en de *waarom*-vraag expliciet in relatie tot elkaar te bespreken. Zoals gezegd biedt het equantmodel hier volop gelegenheid toe, naast nog vele andere modellen.<sup>12</sup>

Door de bestudering van zulke in zich interessante modellen, doen leerlingen spelenderwijs enige *feitelijke kennis* op over de beweging van planeten. Door een kritische bespreking ervan (à la Kepler), worden leerlingen bovendien *gevoelig gemaakt* voor de ambitie en manier van denken van Kepler (en later ook Newton): de beweging van planeten *systematisch afleiden* op grond van *fysische principes* en *krachtwetten*. Tenslotte wordt voor die manier van denken in leerlingen *enthousiasme opgewekt*—ongetwijfeld niet zo sterk als Kepler zo duidelijk gevoeld heeft, maar toch.

## 4 Keplers fysische sterrenkunde

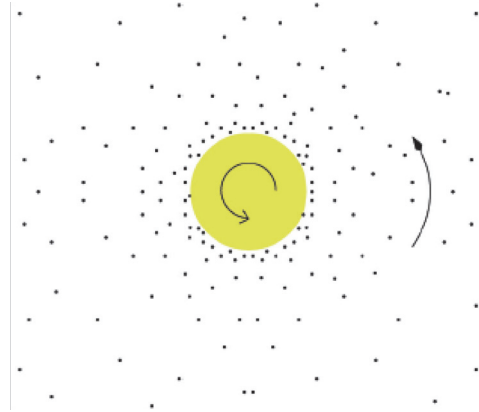
Laat ik nu Keplers fysische sterrenkunde een beetje verder uitwerken, om uit te leggen hoe volgens Kepler de zon de oorzaak kan zijn van de beweging van de planeten. (Voor meer details verwijs ik naar Kepler (1995, 2004), Stephenson (1994) en de hoofdstukken over Kepler in Jammer (1999) en Barbour (2001).)

### 4.1 De planeten worden meegesleurd in een *draaikolk van species*

Als de zon armen en handen had, zou het zou heel gemakkelijk te begrijpen zijn hoe de zon door te roteren een planeet in beweging zou kunnen zetten. Door al roterend een planeet vast te pakken, zou de zon de planeet immers vanzelf in haar hand meeslepen. Hoewel het volgens Kepler zo simpel niet werkt, en de zon volgens hem geen armen en handen heeft, lijkt zijn voorstel hier wel enigszins op. Kepler stelt namelijk voor dat de zon niet door middel van handen grip krijgt op een planeet, maar door ‘iets’ uit te zenden. Dat ‘iets’ noemde hij, in alle vaagheid, *species*.



- Doordat het species van de zon afkomstig is, draait het met de zon mee, in cirkels om de zon. Een planeet wordt door het species in de buurt ‘vastgepakt’, en wordt als het ware in een *draaikolk van species* meegesleurd.
- Dichtbij de zon bevindt zich het meeste species. Daardoor wordt een planeet des te harder meegesleurd, naarmate deze zich dichterbij de zon bevindt.



#### 4.2 Behalve de *draaikolk-invloed* werkt ook nog een *magnetische invloed*

De draaikolk-invloed ten gevolge van de rotatie van de zon kan echter niet de enige kracht zijn. Kepler nam aan dat de zon gelijkmatig om haar eigen as draait. Daardoor beweegt het species eenparig in cirkels om de zon. Daardoor worden de planeten door het species meegesleurd in cirkels om de zon die eenparig doorlopen worden. Maar zoals Kepler uiteraard wist, klopt dit niet met de waarneming. De planeten bewegen in ellipsen waarbij de zon in één van de brandpunten staat. Ook al zijn die ellipsen nagenoeg cirkels, de zon staat niet in het middelpunt ervan. Bovendien bewegen de planeten niet steeds even snel: dichterbij de zon bewegen ze sneller.

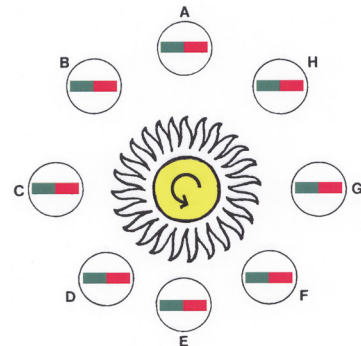
Kepler stelde daarom dat de zon behalve de draaikolk-invloed nog een andere invloed op een planeet uitoefent. Die tweede invloed is volgens hem een soort *magneetwerking*. Keplers idee is dat zich in een planeet ‘*magneten*’ bevinden. De noordpool (rood) wordt aangetrokken door de zon; de zuidpool (groen) wordt afgestoten.

#### 4.3 De twee invloeden samen verklaren de beweging van een planeet

Met behulp van de draaikolk-invloed *en* de magnetische invloed kon Kepler de waargenomen beweging van een planeet als volgt verklaren (Kepler, 1995, pagina 99).

Wanneer een planeet zich in positie A bevindt, zijn beide polen van de magneet even ver van de zon verwijderd. De aantrekking en de afstoting heffen elkaar dan op. In positie A ondervindt de planeet netto dus geen *magnetische invloed*.

De planeet ondervindt in positie A wel de *draaikolk-invloed* ten gevolge van de rotatie van de zon. Daardoor beweegt de planeet in de richting van B. In B aangekomen, bevindt de noordpool van de magneet zich dichterbij de zon dan de zuidpool. De magnetische aantrekking is in B derhalve wat sterker dan de magnetische afstoting. Daardoor wordt de planeet in B netto iets naar de zon toe getrokken. Hetzelfde geldt in C, D en E, daar de hele tijd de noordpool zich dichterbij de zon bevindt dan de zuidpool.



Terwijl de afstand van de planeet tot de zon afneemt, komt de planeet in regionen waar zich meer en meer species bevindt, waardoor de planeet steeds harder meegesleurd wordt door de draaikolinvloed.

Op het traject ABCDE neemt dus niet alleen de afstand van de planeet tot de zon steeds af ten gevolge van de magnetische invloed, maar neemt tegelijkertijd zijn snelheid steeds toe ten gevolge van de draaikolk-invloed.

In E bevindt de planeet zich het dichtst bij de zon. Vanaf dan immers bevindt de zuidpool van de draden zich dicht bij de zon dan de noordpool, en is de magnetische afstoting sterker dan de aantrekking. Dit maakt dat de planeet netto iets van de zon af geduwd wordt. Vanaf E doorloopt de planeet een traject waarbij vanwege de magnetische invloed de afstand tot de zon geleidelijk weer toeneemt, zodat de planeet door een mindere hoeveelheid species wordt meegesleurd en tegelijkertijd dus de snelheid van de planeet weer afneemt. Uiteindelijk komt de planeet weer in A, waar hij zich het verst van de zon bevindt, en herhaalt het hele proces zich.

#### 4.4 Keplers kwalitatieve verklaring

Alleen al op basis van voorgaande beperkte weergave van Keplers theorie over de planeetbeweging, kunnen de volgende conclusies veilig getrokken worden.

1. Door een beroep te doen op fysische oorzaken, was Kepler in staat tenminste een *kwalitatieve of semi-kwantitatieve* verklaring te geven voor de beweging van de planeten: dat de zon niet in het middelpunt staat van de baan van een planeet; dat de planeet dicht bij de zon sneller beweegt.
2. Kepler was niet in staat een precieze *kwantitatieve* verklaring te geven van de planeetbeweging. Hij kon op basis van zijn fysische interactietheorie hooguit aannemelijk maken, maar zeker niet strikt *bewijzen*, dat de baan van een planeet een ellips is (in plaats van een andere ovaalachtige figuur) waarbij de zon zich bevindt in één van de brandpunten.

Deze conclusies vormen een mooie brug naar Newton, en de kracht van wiskunde. In tegenstelling tot Kepler was Newton *wel* in staat strikte bewijzen te leveren. De belangrijkste oorzaak hiervoor is dat Newton gebruik kon maken van één van zijn eigen wiskundige innovaties, namelijk de *mathematisering van verandering* middels zijn differentiaalrekening. Zonder dit wiskundige gereedschap was het voor Kepler simpelweg onmogelijk dezelfde precisie te bereiken als Newton.

## 5 Keplers krachtbegrip en Newtons krachtbegrip

### 5.1 Het traagheidsbeginsel

Newtons wiskundige voorsprong op Kepler is echter niet het enige verschil tussen beiden. Zelfs al had Kepler de beschikking gehad over de differentiaalrekening, dan nog ziet zijn theorie over de planeetbeweging er heel anders uit dan die van Newton. Kepler heeft namelijk *twee* krachten nodig om de planeetbeweging te verklaren: een draaikolk-invloed *en* een magnetische invloed. Newton, daarentegen, heeft maar *één* kracht nodig: een aantrekkende kracht van de zon op de planeet (de zwaartekracht).

Dit verschil tussen Kepler en Newton heeft er mee te maken dat ze een verschillend *traagheidsbeginsel* hanteren. Volgens Kepler heeft een hemellichaam een natuurlijke neiging tot *rust*, om te blijven waar het is, zolang er geen invloed op uitgeoefend wordt: “a celestial globe [...] has a natural  $\alpha\delta\nu\nu\alpha\mu\iota\alpha$  or powerlessness of crossing from place to place, and it has a natural inertia or rest whereby it rests in every place where it is placed alone” (Kepler, 1995, pagina 54).

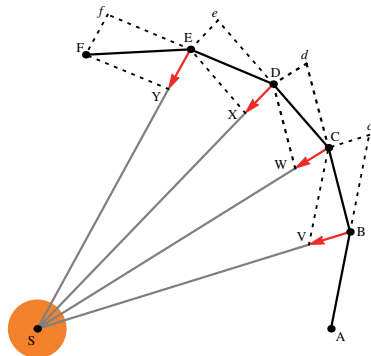
Volgens Newton heeft een lichaam een natuurlijke neiging om *met dezelfde snelheid rechtdoor* te blijven bewegen zolang er geen kracht op werkt. Dit is zijn eerste bewegingswet: “*Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed*” (Newton, 1999, pagina 416).

Newtons traagheidsbeginsel is ruimer dan dat van Kepler. Ook volgens Newton is het zo dat een voorwerp dat in rust is, in rust blijft zolang er geen kracht op werkt. Het heeft dan immers snelheid  $\vec{0}$  en behoudt snelheid  $\vec{0}$ . Maar volgens Newton is het ook zo dat een voorwerp dat een eindige snelheid heeft, die snelheid behoudt zolang er geen kracht op werkt. Volgens Kepler, echter, kan een hemellichaam geen snelheid hebben zonder dat er een kracht op werkt: het verkeert dan in rust.<sup>13</sup>

Er valt een heleboel te zeggen over de keuze van een traagheidsbeginsel, onder andere in relatie tot de begrippen van ruimte en tijd,<sup>14</sup> maar ik wil dit belangrijke onderwerp hier laten rusten ten faveure van een bespreking van de relatie tussen het traagheidsbeginsel en het krachtbegrip. Een andere keuze van het traagheidsbeginsel impliceert namelijk een ander krachtbegrip, zoals ik hierna uitgebreid zal uitleggen. Door zijn andere keuze voor het traagheidsbeginsel, heeft Newton het krachtbegrip wezenlijk vernieuwd. Het is deze innovatie die maakt dat Kepler het ouderschap over het fysisch krachtbegrip moet delen met Newton.

## 5.2 Newtons constructiemethode

De relatie tussen Newtons traagheidsbeginsel en Newtons krachtbegrip komt duidelijk naar voren in Newtons grafische methode om de beweging van een voorwerp onder invloed van een kracht te construeren. In dit voorbeeld gaat het om een centripetale kracht, dat wil zeggen een kracht die steeds in de richting van een vast punt wijst (het punt S). De vraag is hoe het voorwerp onder invloed van die kracht gaat bewegen. Ik laat eerst Newton aan het woord.



“Let the time be divided into equal parts, and in the first part of the time let a body [...] describe the straight line AB. In the second part of the time, if nothing hindered it, this body would (by law 1) go straight on to c, describing the line Bc equal to AB [...]. But when the body comes to B, let a centripetal force act with a single but great impulse and make the body deviate from the straight line Bc and proceed in the straight line BC” (Newton, 1999, pagina 444).

Newton begint dus met zowel de tijd als de kracht te discretiseren. De tijd wordt opgedeeld in gelijke tijdstappen, en de continu werkende kracht wordt geconceptualiseerd als een serie van stoten in de successieve tijdstappen. Over die stoten wordt niets anders aangenomen dan dat ze werken in de richting van het vaste punt S. Verder veronderstelt Newton de beweging in de eerste tijdstap bekend: het voorwerp gaat dan van A naar B. Op basis hiervan kan de rest van de beweging vervolgens stap voor stap geconstrueerd worden.

Zelfs al zou in de tweede tijdstap geen kracht op het voorwerp werken, dan nog zou het volgens Newtons traagheidsbeginsel verder bewegen: met dezelfde snelheid rechtdoor. Het zou de beweging van de eerste tijdstap voortzetten, dus in het verlengde van AB doorgaan en wel over een even grote afstand (want de tijdstappen zijn gelijk). Deze voortzetting is weergegeven door het gestippelde lijnstuk Bc.

In de tweede tijdstap werkt echter wel een kracht op het voorwerp, waardoor het *ook* nog een afwijking ondergaat in de richting van de kracht. Deze afwijking is weergegeven door de rode pijl BV. De beweging in de tweede tijdstap is volgens Newton de *vectoriële som* van de voorgaande twee bijdragen, en kan verkregen worden door de aangegeven parallellogramconstructie. In de tweede tijdstap beweegt het voorwerp dus van B naar C.

In de derde tijdstap is de beweging van het voorwerp de vectoriële som van de ongehinderde voortzetting van de beweging in de tweede tijdstap (Cd) en een afwijking ten gevolge van de kracht (CW). Netto beweegt het voorwerp dan van C naar D. Enzovoorts.

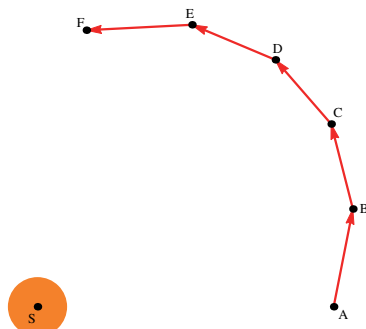
Kortom, de beweging wordt tijdstap voor tijdstap geconstrueerd, in iedere tijdstap als de vectoriële som van twee bijdragen:

- de voortzetting van de beweging in de vorige tijdstap (Bc, Cd, ...), in lijn met Newtons traagheidsbeginsel;
- een afwijking ten gevolge van de kracht (BV, CW, ...).

Om de beschrijving van Newtons constructiemethode te vervolmaken, moet natuurlijk nog opgemerkt worden dat deze voor eindige tijdstappen slechts een benadering van de exacte oplossing geeft. Het is echter onderdeel van de methode dat de exacte oplossing beter en beter benaderd wordt door de tijdstappen kleiner en kleiner te maken. Aldus “the number of triangles [will] be increased and their width decreased indefinitely, and their ultimate perimeter ADF will [...] be a curved line; and thus the centripetal force by which the body is continually drawn back from the tangent of this curve will act uninterruptedly” (Newton, 1999, pagina 445).<sup>15</sup>

### 5.3 Een constructiemethode voor Keplers geval

Laten we nu dezelfde beweging eens proberen te construeren voor Keplers geval. We nemen nu dus Keplers traagheidsbeginsel (rust), en gaan na wat dan voor de Kepleriaanse kracht moet gelden om dezelfde beweging te verkrijgen. We beginnen net als in Newtons geval met de tijd op te delen in gelijke tijdstappen. Verder conceptualiseren we ook nu de (te bepalen) continu werkende kracht als een serie van stoten in de successieve tijdstappen. Laat een voorwerp zich aan het begin van de eerste tijdstap bevinden in positie A.



In de eerste tijdstap, als er geen kracht op het voorwerp werkte, zou het volgens Keplers traagheidsbeginsel in A blijven. Opdat het voorwerp in de eerste tijdstap in B terecht komt, moet derhalve een kracht werken die het voorwerp in de eerste tijdstap een afwijking geeft van A naar B. Deze afwijking is weergegeven door de rode pijl AB. In B aangekomen, zou het voorwerp, als er geen kracht op werkte, in de tweede tijdstap blijven in B.

Opdat het voorwerp in de tweede tijdstap in C terecht komt, moet derhalve een kracht werken die het voorwerp in de tweede tijdstap naar C duwt. Enzovoorts.

Om dezelfde beweging te verkrijgen, moet dus een kracht werken die het voorwerp voortduwt van A naar B, van B naar C, etc.

Net zoals in Newtons geval moet ook in Keplers geval, om de constructie te vervolmaken, nog opgemerkt worden dat deze voor eindige tijdstappen slechts een benadering van de exacte oplossing geeft. Maar ook nu kan de exacte oplossing beter en beter benaderd worden door de tijdstappen kleiner en kleiner te maken. Deze laatste, en belangrijke, conceptuele stap voelde Kepler weliswaar aan, maar kon hij niet formaliseren. In de limiet dat de tijdstappen naar nul naderen, beschrijft het voorwerp een gekromde lijn, werkt de kracht onophoudelijk, en gaat de beweging steeds in de richting van de kracht.<sup>16</sup>

## 5.4 Implicaties van de verschillende traagheidsbeginselen

De verschillen tussen de twee constructies houden rechtstreeks verband met de verschillende traagheidsbeginselen van Kepler en Newton.

### Newton

Newton construeert een beweging als de combinatie van een afwijking veroorzaakt door een kracht *en* een voortzetting van de beweging in de vorige tijdstap (met dezelfde snelheid rechtdoor). Om te kunnen zeggen hoe het voorwerp in de tweede tijdstap ook zonder kracht al zou bewegen, moet dus de beweging in de eerste tijdstap *bekend* zijn. Om de constructiemethode überhaupt op te kunnen starten, moet de positie aan het begin en aan het einde van de eerste tijdstap *gegeven* zijn.

In Newtons geval veroorzaakt een kracht een afwijking van een eenparige rechtlijnige beweging, in de richting van de kracht. Anders gezegd, een kracht veroorzaakt een snelheidsverandering (een versnelling) in de richting van de kracht. Hoe groot de versnelling is die een voorwerp ondergaat ten gevolge van een kracht hangt volgens Newton ook nog af van een eigenschap van het voorwerp zelf: zijn *hoeveelheid materie* ofwel *massa*. De massa van een voorwerp geeft als het ware aan hoeveel ‘weerstand’ het voorwerp biedt tegen de uitgeoefende kracht. Hoe groter de massa van het voorwerp, des te kleiner de versnelling is die het ondergaat. Dit wordt uitgedrukt in Newtons tweede bewegingswet (ik hanteer Newtons notatie om met een punt boven een grootte het veranderingstempo ervan aan te duiden):  $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$ .<sup>17</sup>

### Kepler

In Keplers geval wordt een beweging geconstrueerd als een door een kracht veroorzaakte afwijking vanaf de positie waar het voorwerp zich bevond (en zou blijven als er geen kracht werkte). Om de constructiemethode op te kunnen starten hoeft nu alleen maar te worden uitgegaan van een *gegeven beginpositie*.

Volgens Kepler veroorzaakt een kracht een afwijking van rust, dat wil zeggen een snelheid, in de richting van de kracht. Ook volgens Kepler is het zo dat voorwerpen nog in verschillende mate weerstand kunnen bieden aan een kracht. Anders dan bij Newton, waar het gaat om weerstand tegen een *snelheidsverandering*, gaat het in Keplers geval uiteraard om weerstand tegen een *positieverandering*: “that natural and material resistance or inertia with respect to leaving a place once occupied” (Kepler, 1995, pagina 94). *Inertia* (letterlijk: *luiheid*) speelt in Keplers theorie dus dezelfde rol als *massa* in Newtons theorie. Bovendien is *inertia* volgens Kepler, net zoals massa volgens Newton, een maat voor de hoeveelheid materie. Als we *inertia* weergeven met  $\ell$  (naar luiheid), dan krijgen we in Keplers geval als analogon van  $\vec{F} = m\vec{a}$  de bewegingswet (ik hanteer verschillende symbolen voor de respectieve krachten om te markeren dat het om verschillende grootheden gaat):  $\vec{K} = \ell\vec{v} = \ell\dot{\vec{r}}$ .

## Wiskundige implicatie van de verschillende traagheidsbeginselen

Wiskundig gezien komen de verschillende keuzes die Kepler en Newton gemaakt hebben voor het traagheidsbeginsel erop neer dat hun bewegingsvergelijkingen voor de positie als functie van de tijd van de *eerste* respectievelijk de *tweede* orde zijn.

- Om een *tweede*-orde differentiaalvergelijking volledig op te lossen zijn *twee* begincondities nodig: een beginpositie en een beginsnelheid. Dit komt op hetzelfde neer als een gegeven verplaatsing in een begintijdstap.
- Om een *eerste*-orde differentiaalvergelijking volledig op te lossen is slechts *één* beginconditie nodig: een beginpositie.

De constructies visualiseren, zogezegd, het verschil tussen een eerste-orde en een tweede-orde differentiaalvergelijking.<sup>18</sup>

## 6 Keplers en Newtons theorieën voor de planeten

Het feit dat Kepler en Newton een ander traagheidsbeginsel hanteren, impliceert dat ze een verschillende interactietheorie moeten hebben om de beweging van de planeten te verklaren. Zoveel maakt de voorgaande bespreking duidelijk. De vervolgvraag is of voor beide keuzes van het traagheidsbeginsel een interactietheorie opgesteld kan worden waarmee de planeetbeweging empirisch adequaat verklaard wordt, waarvoor dus de oplossingen van de respectieve bewegingsvergelijkingen in overeenstemming zijn met de waarneming.

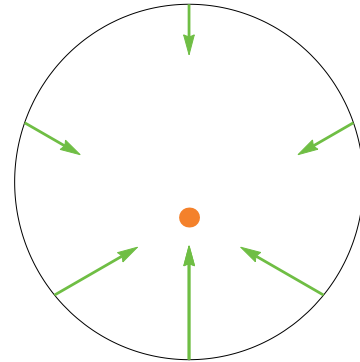
### 6.1 Newton

Zoals bekend heeft Newton bewezen dat de waargenomen beweging van de planeten verkregen wordt, en ook alleen maar verkregen wordt,<sup>19</sup> als geldt:

- De kracht van de zon op een planeet is aantrekkend en de grootte van de kracht is omgekeerd evenredig aan het kwadraat van hun onderlinge afstand:

$$\vec{F}^{\text{gr}} = -\gamma \frac{m_z m_p}{r^2} \hat{r}$$

Dit is Newtons gravitatiewet. De relevante dynamische parameters zijn hier de massa's  $m_z$  en  $m_p$  van de zon resp. de planeet. Verder is  $\gamma$  een positieve constante: de gravitatieconstante.



### 6.2 Kepler

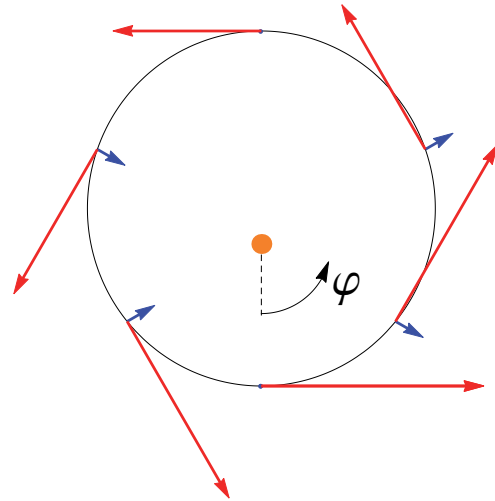
Ook in Keplers geval blijkt het mogelijk te bewijzen dat de waargenomen beweging van de planeten verkregen wordt door precieze aannames te maken over de krachten. Dit is iets dat Kepler zelf niet heeft kunnen doen, bij gebrek aan differentiaalrekening. Het is echter vrij eenvoudig aan te tonen dat de waargenomen beweging van een planeet wordt verkregen, en ook alleen maar wordt verkregen,<sup>20</sup> als geldt:

- De draaikolk-invloed (rood), die loodrecht staat op de voerstraal (in de richting van de hoek  $\varphi$ ), is wat grootte betreft omgekeerd evenredig aan de onderlinge afstand:

$$\vec{K}^{\text{dk}} = \alpha \frac{\omega}{r} \hat{\varphi}$$

- De magnetische invloed (blauw), die gericht is langs de voerstraal, is aantrekkend of afstotend naar mate van de sinus van de hoek  $\varphi$ :

$$\vec{K}^{\text{ma}} = \beta s \sin \varphi \hat{r}$$



De relevante dynamische parameters hierbij zijn de hoeksnelheid  $\omega$  van de rotatie van de zon en de sterkte  $s$  van de magneet. Verder zijn  $\alpha$  en  $\beta$  positieve constanten.

### 6.3 Conclusies

#### De Kepleriaanse en Newtoniaanse oplossingsruimtes vergeleken

Het blijkt dat vrijwel alle oplossingen van de Newtoniaanse bewegingsvergelijking voor een geschikte keuze van de parameters precies ook oplossingen zijn van de Kepleriaanse bewegingsvergelijking. Meer precies geldt:<sup>21</sup>

- Alle elliptische, parabolische en hyperbolische oplossingen van de Newtoniaanse bewegingsvergelijking zijn voor een geschikte keuze van de parameters ook oplossingen van de Kepleriaanse bewegingsvergelijking.
- Slechts één type Newtoniaanse oplossing heeft geen Kepleriaans equivalent, namelijk het geval waarbij een hemellichaam met een toenemende versnelling in een rechte lijn recht op de zon af beweegt (simpele valbeweging).
- De Kepleriaanse bewegingsvergelijking heeft ook nog oplossingen die niet-Newtoniaans zijn.

#### De wetenschappelijke status van Keplers en Newtons theorie voor de planeten vergeleken

Ondanks dat de oplossingsruimten van hun respectieve bewegingsvergelijkingen vrijwel samenvallen, heeft Keplers theorie voor de planeten niet dezelfde wetenschappelijke status als Newtons theorie. Op gangbare criteria waarop alternatieve theorieën tegen elkaar afgewogen kunnen worden, scoort Newtons theorie beter dan Keplers theorie. Ik noem enkele punten, zonder volledigheid na te streven.

**Plausibiliteit** Volgens Keplers theorie hangt de grootte van de magnetische kracht *niet* af van de afstand:

$$|\vec{K}^{\text{ma}}| = \beta s |\sin \varphi|$$

Dit is tegen-intuïtief, omdat het in de rede ligt te verwachten dat een kracht kleiner wordt op grotere afstand. Als we echter een andere aanname maken voor de magnetische kracht, krijgen we niet meer de waargenomen planeetbeweging als oplossing van de Kepleriaanse bewegingsvergelijking (zie noot 20).

**Coherentie** De grootheden *luiheid* en (*trage*) *massa* zijn gedefinieerd in termen van de weerstand die een voorwerp biedt tegen een positieverandering resp. een snelheidsverandering. Kepler en Newton veronderstelden bovendien een gelijkheid tussen luiheid resp. (*trage*) *massa* en *hoeveelheid materie* (zware massa). In Newtons geval levert de gelijkstelling van *trage* en zware massa geen conflict op met de waarneming. In Keplers geval, echter, is de gelijkstelling van luiheid en zware massa problematisch. Stel namelijk luiheid gelijk aan zware massa. Via de empirisch adequate identificatie van zware en *trage* massa, volgt hieruit dus ook een gelijkstelling van luiheid en *trage* massa. Deze gelijkstelling blijkt echter te impliceren, dat Keplers theorie alleen maar op *alle* planeten tegelijkertijd empirisch adequaat *en* consistent (d.w.z. met in alle gevallen dezelfde rotatiesnelheid van de zon) toegepast kan worden, als de baanimpulsmomenten van alle planeten even groot zijn.<sup>22</sup> Dit laatste is echter feitelijk niet het geval. Kepler heeft derhalve geen andere keuze dan de intuïtief aannemelijke connectie tussen *luiheid* en *hoeveelheid materie* te laten vallen.

**Generaliseerbaarheid** Keplers theorie is tot op zekere hoogte generaliseerbaar. De theorie kan, net zoals Newtons theorie, niet alleen toegepast worden op planeten, maar bijvoorbeeld ook op kometen. Toch is Keplers theorie beduidend minder generaliseerbaar dan die van Newton.

De waargenomen planeetbewegingen corresponderen bijvoorbeeld tot op zeer grote nauwkeurigheid met de Kepleriaanse en Newtoniaanse oplossingen, maar niet exact. In Newtons geval zijn de meeste afwijkingen te verklaren door niet alleen de gravitationele interactie tussen de zon en de planeten in rekening te brengen, maar daarenboven ook de gravitationele interacties tussen de planeten onderling. Hierbij gaat het dus om een bredere toepassing van nog steeds dezelfde theorie. Deze laatste mogelijkheid staat voor Kepler echter niet open. In Keplers geval kunnen de afwijkingen niet met dezelfde theorie verklaard worden. Daartoe zou Kepler zijn theorie moeten modificeren.

Verder is Newtons zwaartekrachtswet niet alleen op hemellichamen van toepassing, maar eveneens op het vallen van voorwerpen op aarde. Het is per slot van rekening één van Newtons meest gelukkige gedachten geweest, dat het bij het vallen van een appel en het bewegen van de maan om de aarde in feite om één en hetzelfde verschijnsel gaat. Keplers theorie voor de planeten is echter niet van toepassing op de simpele valbeweging (zie noot 21). Voor het vallen van voorwerpen op aarde moet een andere theorie bedacht worden—en Kepler had daar ook een andere theorie voor, waarin de zwaartekracht *wel* een rol speelt.

### **Historisch heeft een afweging tussen de theorieën van Kepler en Newton niet plaatsgevonden**

Mijn belangrijkste conclusies naar aanleiding van het voorgaande zijn:

- Ook met Keplers traagheidsbeginsel kan een serieuze poging gedaan worden om de planeetbeweging te verklaren. Er kan zelfs meer gedaan worden dan Kepler zelf kon realiseren vanwege zijn gebrek aan differentiaalrekening.
- Keplers poging kan zinvol afgewogen worden tegen Newtons poging op gangbare criteria om theorieën met elkaar te vergelijken, zoals plausibiliteit, coherentie en generaliseerbaarheid.



Historisch heeft een afweging tussen de theorieën van Kepler en Newton niet plaatsgevonden. Kepler kon het niet, enerzijds omdat hij Newtons theorie niet kende en anderzijds omdat hij bij gebrek aan differentiaalrekening onvoldoende strikte bewijzen kon leveren. Newton heeft het niet gedaan. Hij heeft zich beperkt tot het presenteren en uitwerken van zijn eigen theorie. Hij heeft niet ook Keplers theorie geformaliseerd om vervolgens die geformaliseerde theorie te vergelijken met zijn eigen theorie. Dit wil uiteraard niet zeggen dat Newton het niet gekund zou hebben. Hij heeft het alleen niet gedaan. Het dichtst bij komt nog dat Newton in zijn eigen kopie van de tweede druk van de *Principia*, op de plaats waar hij het traagheidsbegrip behandelt, een briefje had geplakt met daarop geschreven dat zijn traagheidsbeginsel afwijkt van dat van Kepler: volgens Kepler volhardt een voorwerp in rust, volgens hemzelf in een eenparige rechtlijnige beweging (Newton, 1999, pagina 101).

Maar ook al heeft historisch een expliciete afweging tussen (een geformaliseerde versie van) Keplers theorie en Newtons theorie niet plaatsgevonden, toch is het naar mijn mening de moeite waard om zo'n afweging in een onderwijscontext wel te laten plaatsvinden. Dit brengt me bij mijn slotopmerkingen.

## 7 Didactische suggesties

Naar aanleiding van het contrast tussen Ptolemeus en Kepler heb ik al een eerste didactische suggestie genoemd (zie §3.4). Naar aanleiding van het contrast tussen Kepler en Newton, wil ik nog twee andere suggesties doen.<sup>23</sup>

Een eerste verdere suggestie is om op een geschikte manier vertrouwde causale kennis bij leerlingen aan te boren of wakker te maken, als voorbereiding op een explicitering van de relatie tussen krachtbegrip en traagheidsbeginsel (Klaassen, Westra, Emmett, Eijkelhof & Lijnse, 2008). De relatie tussen krachtbegrip en traagheidsbeginsel komt aan de ene kant erg ingewikkeld over, maar is aan de andere kant toch erg vertrouwd. In de meest algemene zin zegt die relatie namelijk niets anders dan dat een kracht een afwijking veroorzaakt van hoe een voorwerp uit zichzelf al verder zou bewegen. En dat is eigenlijk niks anders dan een speciaal geval van alledaagse causale kennis waarvan we voortdurend gebruik maken, zoals: veranderingen zijn veroorzaakt. Of ook: we zoeken naar oorzaken waar we veranderingen zien van de gewone gang van zaken.

Een laatste suggestie die ik hier wil doen is om de theorieën van Kepler en Newton in concurrentie met elkaar te ontwikkelen (Wooning, Van Dijk, Emmett & Klaassen, 2008; Emmett, Klaassen & Eijkelhof, 2009). Een theorie wordt immers des te beter begrepen wanneer ook begrepen wordt waarom deze beter is dan andere. Bovendien zal Keplers traagheidsbeginsel voor veel leerlingen initieel minstens zo plausibel klinken als dat van Newton. Er zijn echter geen dwingende *a priori* redenen om het ene traagheidsbeginsel te prefereren boven het andere, en pas in combinatie met een interactietheorie zijn *totale* theorieën tegen elkaar af te wegen.<sup>24</sup> Verder wordt vaak bepleit om wetenschapsfilosofische aspecten in het natuurwetenschappelijk onderwijs aan bod te laten komen. Dat lijkt mij ook een goede zaak, maar dan niet losgekoppeld van natuurwetenschappelijke inhoud, maar juist direct daaraan verbonden. Op grond van gangbare wetenschapsfilosofische criteria om te kiezen tussen alternatieve theorieën—zoals plausibiliteit, coherentie en generaliseerbaarheid—kunnen ook leerlingen uiteindelijk gebracht worden tot een beargumenteerde voorkeur voor Newtons theorie boven die van Kepler. Tenslotte blijkt voor sommige leerlingen de historische context motiverend te werken.

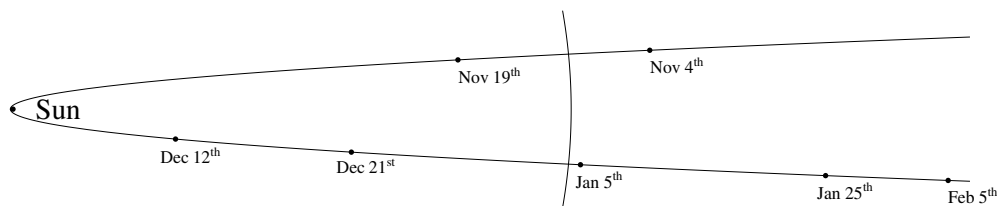
## Noten

<sup>1</sup>Wat betreft Newtons verklaring voor de beweging van hemellichamen, ben ik het meest onder de indruk van het sluitstuk van de *Principia*.

Newton behandelt daar een komeet die van november 1680 tot maart 1681 aan de hemel te zien is geweest. De komeet wordt de *Grote Komeet van 1680* genoemd, en te oordelen naar nevenstaand Duits vlugschrift uit 1680 moet het een indrukwekkend verschijnsel zijn geweest, waar grote menigtes zich aan vergaapten. Newton zelf heeft er met een telescoop precieze waarnemingen aan verricht, net zoals vele sterrenkundigen over de hele wereld.



Met behulp van zijn theorie heeft Newton een ingenieuze manier afgeleid om, op basis van de gemeten hoekcoördinaten (astronomische breedtegraad en hoogtegraad) op *drie* geschikt gekozen observatiemomenten, de beweging van de komeet tot op willekeurige nauwkeurigheid te bepalen. Hij kon dus de baan van de komeet construeren, en ook voor ieder gewenst tijdstip de positie op de baan waar de komeet zich toen bevond. In de figuur (naar een vergelijkbare figuur uit de *Principia*) staat die baan weergegeven, alsmede voor enkele data de door Newton berekende positie.



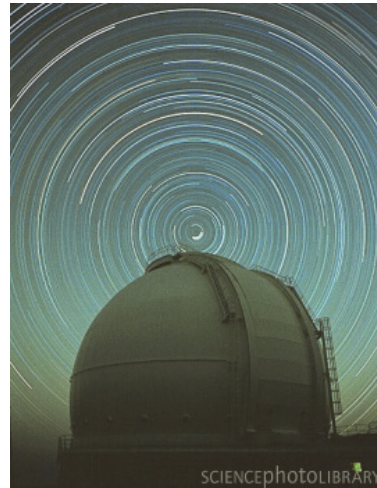
De cirkelboog geeft de straal van de baan van de aarde om de zon, en legt dus de afstandsmaat vast. Uit Newtons berekeningen volgt tevens de hoek tussen het vlak waarin de komeet beweegt en het vlak waarin de aarde beweegt ( $61^\circ 20' 20''$ ). De beweging van de komeet is hiermee volledig bepaald en dit alles, nogmaals, op basis van de gemeten astronomische breedtegraad en hoogtegraad op drie geschikt gekozen observatiemomenten. (De bewegingsvergelijking voor de komeet is een tweede-orde differentiaalvergelijking. De oplossing hiervan wordt dus volledig vastgelegd door 6 begincondities: de positie en de snelheid op een bepaald tijdstip. Newton toont aan hoe de oplossing ook volledig te bepalen is op basis van 6 andere condities: twee hoeken op drie verschillende (geschikt gekozen) tijdstippen. Voor een uitvoerige uitleg bij Newtons constructie verwijs ik naar Chandrasekhar (1995, hoofdstuk 24).)

Welnu, uit de berekende posities van de komeet op de genoemde data, alsmede de bekende positie van de aarde op die data, zijn vervolgens de hoeken te bepalen waaronder op die data de komeet tegen de achtergrond van de vaste sterren te zien moet zijn geweest. En het blijkt dan uit de precisiemetingen van Newton en anderen dat de komeet op die data inderdaad onder die hoeken is waargenomen. Een schitterende bevestiging van Newtons theorie! We kunnen het Newton vergeven dat hij enigszins overenthousiast concludeert: “the theory that corresponds exactly to so nonuniform a motion throughout the greatest part of the heavens, and that observes the same laws as the theory of the planets, and that agrees exactly with exact astronomical observations cannot fail to be true” (Newton, 1999, pagina 916).

<sup>2</sup>Het paard wordt volgens mij dan ook achter de wagen gespannen, wanneer in een poging het natuurkundeprogramma voor de middelbare school te moderniseren onderwerpen als relativiteitstheorie en kwantummechanica opgenomen worden ten koste van klassieke mechanica.

<sup>3</sup>Aan het eind zijn enkele artikelen bijgevoegd die meer op de didactiek ingaan.

<sup>4</sup>Het Griekse ideaal om de beweging van hemellichamen te beschrijven in termen van *cirkels* die met *constante snelheid* doorlopen worden komt voort uit het idee dat bij de waardigheid van een hemels lichaam niets anders past dan de meest *perfecte* beweging die maar denkbaar is. En wat is er volmaakter dan statig voortschrijden langs de meest perfecte kromme?

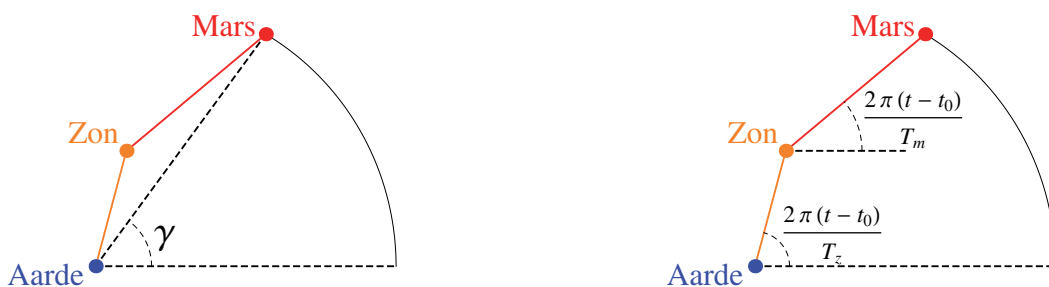


Verder wordt het idee van een eenparige cirkelbeweging ondersteund door waarnemingen. Nevenstaande foto is genomen met een op de poolster gerichte camera, bij een zeer lange sluitertijd. Vanaf de aarde gezien doorlopen de sterren in één dag een cirkel, en doen ze dat perfect gelijkmatig.

Door geduldige waarneming heeft Ptolemeus bijna 2000 jaar geleden hetzelfde ook al vastgesteld. Hierbij was hij zich er terdege van bewust dat uit de waarnemingen niet noodzakelijkerwijs volgt dat het de sterren zijn die bewegen. De waarnemingen kunnen even goed begrepen worden door aan te nemen dat de sterren stilstaan en dat de aarde perfect gelijkmatig om haar eigen as draait. Ook onder deze aannames is het zo dat de sterren, vanaf de aarde gezien, in één dag een cirkel doorlopen, en dat ze dat gelijkmatig doen.

Ptolemeus verwerpt echter deze aannames. Als de aarde echt om haar eigen as draaide, zo redeneerde hij, dan zouden we toch allemaal van de aarde geslingerd moeten worden! Dit is uiteraard geen onzinnige gedachte. Het is niet voor niets dat Newton, gaandeweg de ontwikkeling van zijn zwaartekrachtstheorie, nadrukkelijk controleert of de door hem voorgestelde zwaartekracht groot genoeg is om ons met beide voeten aan de grond te houden.

<sup>5</sup>Daar het niet mogelijk is op een directe manier de *afstand* tot een planeet te bepalen, zijn sterrenkundige positiebepalingen zijn in eerste instantie *hoek*bepalingen. Daar (geocentrisch gesproken) de zon en de planeten zich allemaal min of meer in hetzelfde vlak bewegen, volstaat het om de positie van een planeet weer te geven met één enkele hoek (de hoek  $\gamma$  in de figuur).



Het epicykel model zegt dat de zon gelijkmatig een cirkel doorloopt om de aarde, terwijl tegelijkertijd Mars gelijkmatig een cirkel doorloopt om de zon. Veronderstel dat op tijdstip  $t = t_0$  de aarde, de zon en Mars op één lijn liggen, en dat de hoek  $\gamma$  vanuit deze lijn gemeten wordt. Er geldt dan volgens het epicykelmodel voor de hoek  $\gamma$  als functie van de tijd  $t$ , met  $R_z$  de afstand tussen de zon en de aarde,  $R_m$  de afstand tussen Mars en de zon,  $T_z$  de omlooptijd van de zon om de aarde, en  $T_m$  de omlooptijd van Mars om de zon:

$$\tan \gamma(t) = \frac{R_z \sin \frac{2\pi}{T_z} (t - t_0) + R_m \sin \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0)}{R_z \cos \frac{2\pi}{T_z} (t - t_0) + R_m \cos \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0)}$$

De grootheden  $t_0$ ,  $T_z$  en  $T_m$  zijn vrij direct uit waarnemingen te bepalen. De nog resterende grootte  $\frac{R_m}{R_z}$  is op te vatten als een fit-parameter, waarvan de optimale waarde uit waarnemingen te bepalen is. In de grafieken op pagina 3 wordt de voorspelling van  $\gamma(t)$  volgens het epicykelmodel vergeleken met de voorspelling van  $\gamma(t)$  volgens Newtons theorie over de planeetbeweging. Van deze laatste theorie wordt hier aangenomen dat deze strookt met de waarneming.

<sup>6</sup>Voor de overige planeten die Ptolemeus kende—Mercurius, Venus, Jupiter en Saturnus—is de voorspelling van het epicykelmodel meer accuraat, met afwijkingen van hooguit  $5^\circ$ .

<sup>7</sup>Ptolemeus wordt vaak afgeschilderd als een ietwat simpele ziel die in zijn onnozelmheid dacht dat de aarde in het middelpunt van het heelal stond. Naar mijn mening is dit beeld onterecht. Ik nodig de lezer uit eens een blik te werpen in de *Almagest* (Ptolemeus' hoofdwerk), waarvan ook een Engelse vertaling beschikbaar is (Ptolemy, 1998). Het boek staat vol met pittige wiskunde, vooral meetkunde, in de context van sterrenkunde.

<sup>8</sup>Het equantmodel zegt dat de zon gelijkmatig een cirkel doorloopt om de aarde, terwijl tegelijkertijd Mars een cirkel doorloopt zodanig dat het middelpunt ervan precies tussen de zon en de equant ligt en zodanig dat vanuit de equant gezien de hoeksnelheid constant is. Het is vrij eenvoudig hiermee de voorspelling volgens het equantmodel voor de waarneembare hoek  $\gamma$  te bepalen (zie ook de figuur op de volgende pagina).

Veronderstel dat op tijdstip  $t = t_0$  de aarde, de zon en Mars op één lijn liggen en dat de afstand van Mars tot de zon dan tevens het kleinst is. Als we vervolgens deze lijn kiezen als de basis van waaruit de hoek  $\gamma$  gemeten wordt, dan geldt, met  $R_z$  de afstand tussen de zon en de aarde,  $R_M$  de afstand tussen Mars en het middelpunt  $M$  van de cirkel die Mars doorloopt,  $d$  de afstand tussen de zon en de equant  $E$  van de baan van Mars,  $R_E(t)$  de afstand tussen de equant en de positie van Mars op tijdstip  $t$ ,  $T_z$  de omlooptijd van de zon om de aarde, en  $T_m$  de omlooptijd van Mars om de zon:

$$\tan \gamma(t) = \frac{R_z \sin \frac{2\pi}{T_z} (t - t_0) + R_E(t) \sin \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0)}{R_z \cos \frac{2\pi}{T_z} (t - t_0) + R_E(t) \cos \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0) - d}$$

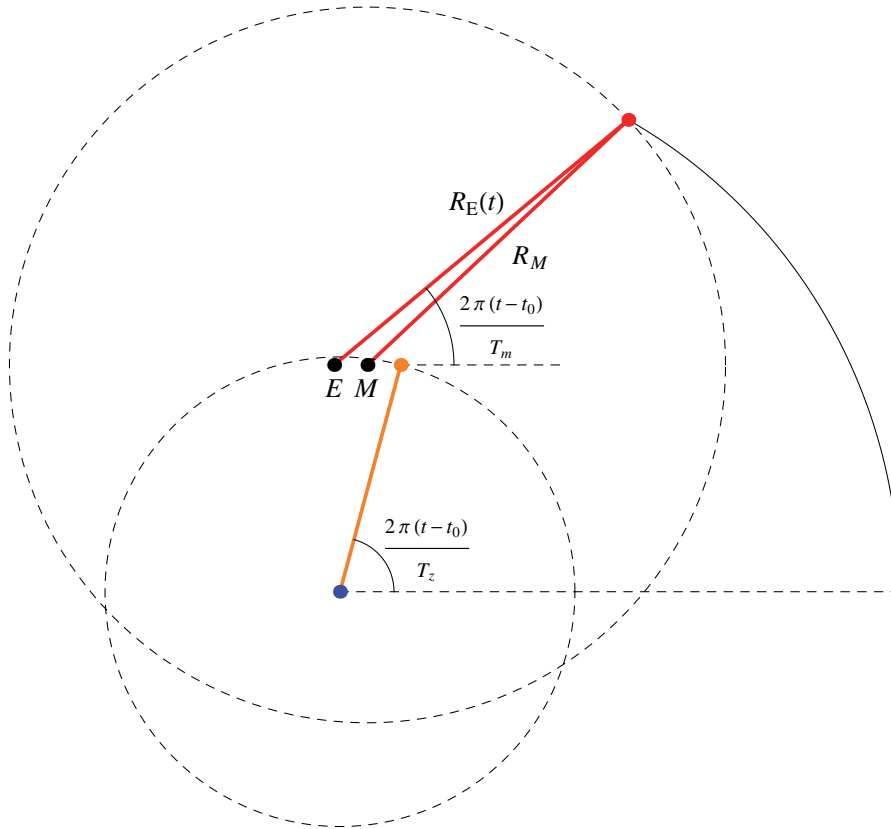
De afstand  $R_E(t)$  wordt vastgelegd door de eis dat Mars een cirkel doorloopt:

$$R_M = \sqrt{\left(R_E(t) \cos \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0) - \frac{1}{2}d\right)^2 + \left(R_E(t) \sin \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0)\right)^2}$$

De oplossing hiervan is:

$$R_E(t) = \frac{1}{2}d \cos \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0) + \sqrt{R_M^2 - \frac{1}{4}d^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T_m} (t - t_0)}$$

Uiteindelijk wordt aldus een uitdrukking voor  $\gamma(t)$  gevonden in termen van de grootheden  $T_z$ ,  $T_m$ ,  $t_0$ ,  $\frac{R_M}{R_z}$  en  $\frac{d}{R_z}$ , waarvan de laatste twee als fit-parameters fungeren.



<sup>9</sup>Er geldt exact voor de planeetbeweging:

- De baan van een planeet is een ellips met de zon in één van de brandpunten.
- Het tempo waarin de baan wordt doorlopen wordt gegeven door de perkenwet.

Volgens het equantmodel geldt voor de planeetbeweging:

- De baan van een planeet is een cirkel waarbij de zon niet in het middelpunt staat.
- Vanuit de equant is de hoekbeweging van de planeet eenparig.

De bewering dat het equantmodel correct is tot en met de eerste orde in de eccentriciteit  $e$  houdt in dat het equantmodel wordt verkregen uit de exacte planeetbeweging door termen van de orde  $e^2$  te verwaarlozen. Om in te zien dat dit inderdaad het geval is, is het nuttig eerst enkele eigenschappen van ellipsen op te halen.

Een ellips kan geconstrueerd worden met behulp van twee spijkers, een touwtje, en een pen. Sla de spijkers in een plank; maak een lus van het touwtje en leg die lus rond de spijkers; zet de pen tegen het touwtje aan, trek het strak, en beweeg de pen rond.

Het resultaat is een ellips, waarbij de spijkers de twee brandpunten vormen. Een ellips wordt aldus volledig gekarakteriseerd door de afstand  $d$  tussen de brandpunten en de lengte  $l$  van het touwtje. Een speciaal geval wordt gevormd door  $d = 0$ , waarbij de twee brandpunten samenvallen en de figuur een cirkel wordt.

De definiërende relatie  $d + r_1 + r_2 = l$  van de ellips wordt in termen van de cartesische coördinaten  $x$  en  $y$ :

$$d + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}d\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + y^2} = l$$

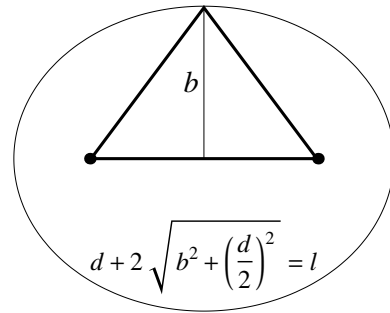
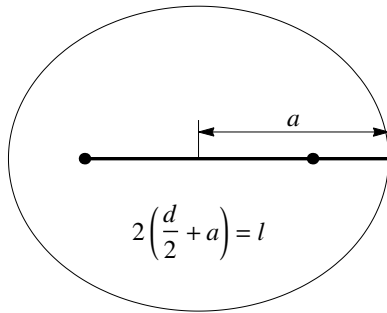
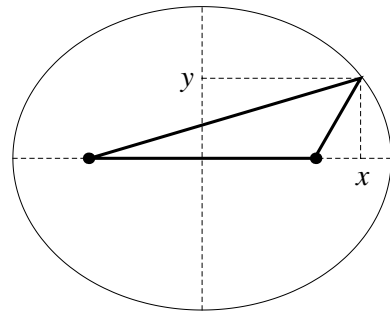
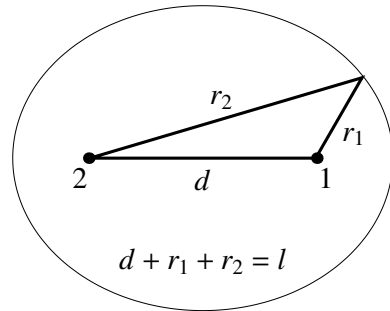
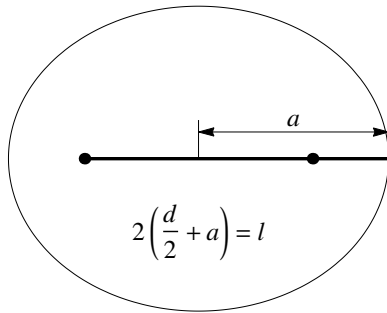
Enig rekenwerk wijst uit dat dit equivalent is aan:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

waarbij de parameters  $a$  en  $b$  als volgt gerelateerd zijn aan  $d$  en  $l$ :

$$2\left(\frac{1}{2}d + a\right) = l \qquad d + 2\sqrt{b^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2} = l$$

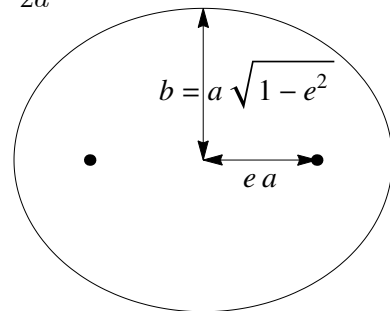
Uit de constructiemethode van een ellips volgt dat de parameters  $a$  en  $b$  te interpreteren zijn als de halve lange resp. de halve korte as.



Nog een andere manier om een ellips te karakteriseren gaat in termen van de halve lange as  $a$  en de zogenaamde *eccentriciteit*  $e \equiv \frac{d}{2a}$ .

De afstand van het middelpunt van de ellips tot een brandpunt is dus per definitie  $ea$ , zodat de eccentriciteit de mate aangeeft waarin de brandpunten uit het middelpunt (*ex centro*) staan. Er geldt:  $0 \leq e < 1$ , waarbij het geval  $e = 0$  correspondeert met een cirkel. In termen van  $a$  en  $e$  volgt voor de halve korte as:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$



Een ellips kan ook geconstrueerd worden door een cirkel in te drukken. Een grootte die in dat verband ook wel gebruikt wordt om de mate aan te geven waarin een ellips afwijkt van een cirkel is de zogenaamde *ellipticiteit*  $f$ , ook wel *afplattung* genoemd, en gedefinieerd als het relatieve verschil van de halve lange en de halve korte as:

$$f = \frac{a - b}{a}$$

Net als de eccentriciteit neemt ook de ellipticiteit waarden aan tussen 0 en 1, waarbij het geval  $f = 0$  correspondeert met een cirkel.

De eccentriciteit en de ellipticiteit zijn als volgt gerelateerd.

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

Voor een niet al te grote eccentriciteit kunnen we het rechterlid Taylor-ontwikkelen. Er volgt:

$$f = \frac{1}{2}e^2 + \mathcal{O}(e^4)$$

Als we startend vanuit een cirkel de eccentriciteit geleidelijk aan vergroten, is de verwijdering van de brandpunten van elkaar een *eerste-orde* effect in de eccentriciteit ( $2ea$ ), terwijl de afwijking van de cirkel een *tweede-orde* effect is in de eccentriciteit ( $\frac{1}{2}e^2a$  + hogere orde).

Voor de andere aanname van het equantmodel, namelijk dat vanuit de equant de hoekbeweging eenparig is, geldt dezelfde conclusie als zojuist getrokken is voor de aanname over de baan. Dit is ook een benadering die tot en met de eerste orde in de eccentriciteit correct is. Het bewijs van deze bewering maakt gebruik van de perkenwet en van de volgende eigenschap van een ellips.

De oppervlakte  $O$  gemeten vanuit het ene brandpunt is bij benadering evenredig aan de hoek  $\beta$  gemeten vanuit het andere brandpunt:

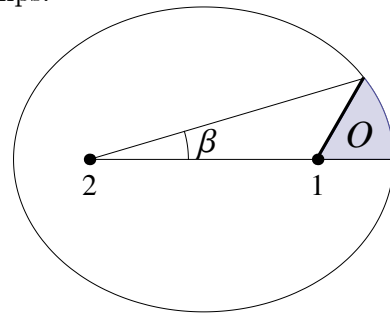
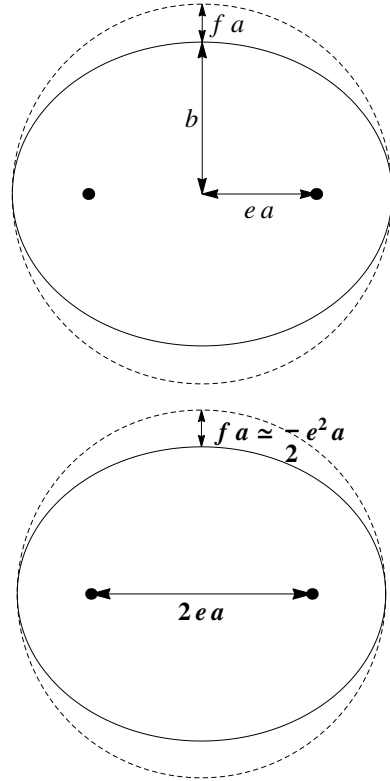
$$O \simeq \frac{1}{2}ab\beta$$

De bewering geldt exact voor de hoeken  $\beta = 0$ ,  $\beta = \pi$  en  $\beta = 2\pi$ . Zo hebben we voor  $\beta = 2\pi$  te maken met een gevulde ellips, en de oppervlakte daarvan wordt inderdaad gegeven door  $\pi ab$ .

Voor andere waarden van de hoek  $\beta$  is de benadering niet exact, maar wel tot en met de eerste orde in de eccentriciteit. Het blijkt namelijk dat de volgende afchatting gemaakt kan worden, die geldt voor een voldoende kleine eccentriciteit ( $e \in [0, \frac{1}{4}]$ ) en voor alle  $\beta \in [0, 2\pi]$ :

$$|O - \frac{1}{2}ab\beta| \leq \frac{1}{6}abe^2$$

Dat wil zeggen, afwijkingen van de evenredige toename van het oppervlak  $O$  met de hoek  $\beta$  zijn van de orde  $e^2$ .



Voor de exacte beweging van een planeet geldt dat de planeet een ellips doorloopt met de zon in één van de brandpunten. Het tempo waarin de planeet de baan doorloopt wordt bepaald door de perkenwet. Deze wet zegt dat de voerstraal van een planeet, gemeten vanaf de zon  $S$ , in gelijke tijden gelijke oppervlakken bedekt.

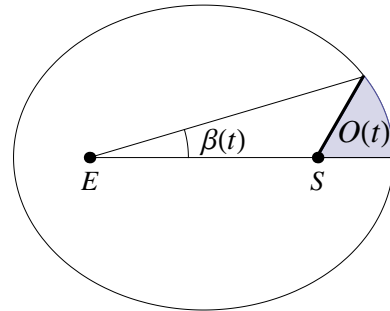
Als we het tijdstip  $t = 0$  zo kiezen dat op dat moment  $\beta = 0$ , dan volgt dus voor de bedekte oppervlakte  $O(t)$  op tijdstip  $t$ , met  $T$  de omlooptijd van de planeet:

$$O(t) = \pi ab \frac{t}{T}$$

Met behulp van voorgaande afchatting volgt tenslotte voor de hoek  $\beta(t)$  vanuit de equant  $E$ :

$$|\beta(t) - \frac{2\pi}{T}t| \leq \frac{1}{3}e^2$$

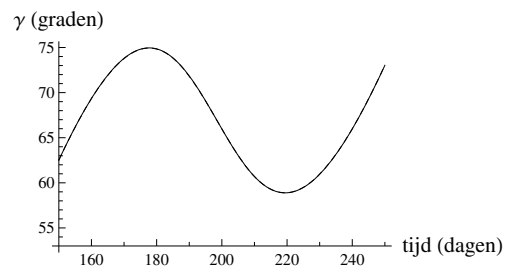
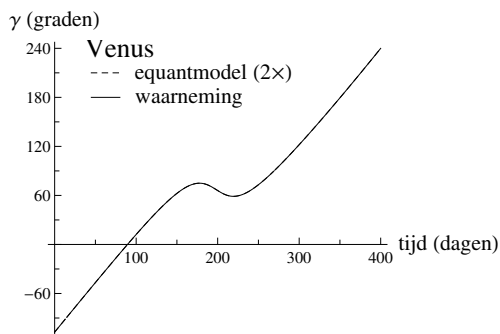
Zelfs voor Mercurius, met een eccentriciteit van ongeveer  $\frac{1}{5}$ , geldt dat de afwijking van de eenparige toename  $\frac{2\pi}{T}t$  hooguit  $\frac{1}{75}$  rad is, ofwel  $0,76^\circ$ .



<sup>10</sup>Voor Mars, Mercurius, Saturnus en Jupiter is de voorspelling van het equantmodel zeer adequaat, met afwijkingen van hooguit een halve tot een hele graad. Alleen voor Venus, *nota bene* de planeet met de kleinste eccentriciteit, geeft het equantmodel geen verbetering ten opzichte van het epicykel model. De reden hiervoor is simpel. Bedenk namelijk dat de hoek  $\gamma$  betrekking heeft op een *samengestelde* beweging: Venus om de zon (epicykel) gesuperponeerd op de zon om de aarde (cykel). Bedenk verder dat voor Ptolemeus de aarde niet zomaar één van de planeten is. Daarom is het niet in hem opgekomen het equantmodel niet alleen op de epicykel toe te passen, maar ook op de cykel.

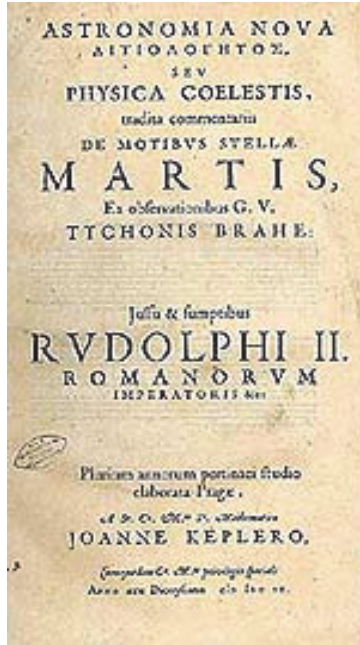
Ptolemeus heeft dus *geen* correcties aangebracht voor de baan van de zon om de aarde. Hoewel klein, zijn zulke correcties er wel degelijk, en zijn ze zelfs relevanter dan de wel aangebrachte correcties voor de baan van Venus om de zon. De eccentriciteit van de aarde heeft immers de waarde 0,017 ( $\sim \frac{1}{60}$ ), ruim twee keer zo groot als die van Venus. Juist voor Venus weegt het achterwege laten van de correcties het zwaarst door, omdat Venus van alle planeten het dichtst bij de aarde komt.

Het is derhalve niet zozeer een tekortkoming van het equantmodel dat de resultaten voor Venus minder goed zijn. Veeleer is het equantmodel onvoldoende consequent toegepast. In onderstaande grafieken is de voorspelling van de hoek  $\gamma$  voor Venus weergegeven, wanneer het equantmodel niet alleen op de epicykel maar ook op de cykel wordt toegepast. De overeenstemming is nagenoeg perfect. Hetzelfde geldt voor een dubbele toepassing van het equantmodel op Mars, Jupiter en Saturnus. Voor Mercurius geeft de dubbele toepassing geen verbetering boven de enkele toepassing, daar de eccentriciteit van Mercurius zoveel groter is dan die van de aarde.





<sup>11</sup>Kepler was zich er terdege van bewust dat hij iets nieuws te pakken had, zoals onder meer blijkt uit de volledige titel van zijn *Astronomia Nova* uit 1609, het boek waarin hij zijn causale verklaring van de planeetbeweging voor het eerst gepresenteerd heeft (zie Kepler (2004) voor een Engelse vertaling van enkele fragmenten uit dit lijvige boekwerk).



Laten we het begin van de titel stap voor stap door-nemen. *ASTRONOMIA NOVA*—*NIEUWE STERRENKUNDE*. Vervolgens schakelt Kepler over naar het Grieks, ik veronderstel bij wijze van nadruk, om uit te leggen wat er nieuw is aan zijn sterrenkunde: *AITIOLOGHTOZ*—*ETIOLOGISCH*, zo iets als ‘met oorzakelijke verklaringen’ (het Griekse ‘αἰτία’ betekent ‘oorzaak’). En vervolgens opnieuw: *seu PHYSICA COELESTIS*—*ofwel HEMEL-FYSICA*, zo iets als ‘astrofysica’.

Analoog formuleert Kepler in een later boek als hoofdtaak van een sterrenkundige: “the big job to be worked on by the true astronomer is to demonstrate from observations what figures the planetary orbits possess; and to devise such hypotheses, or physical principles, as can be used to demonstrate the figures which are in accord with the deductions made from observations” (Kepler, 1995, pagina 124).

<sup>12</sup>Een ander voorbeeld wordt gegeven door spirograaf-achtige modellen van het zonnestelsel, analoog aan onderstaande figuur uit de hemelAtlas van Cellarius (1660).

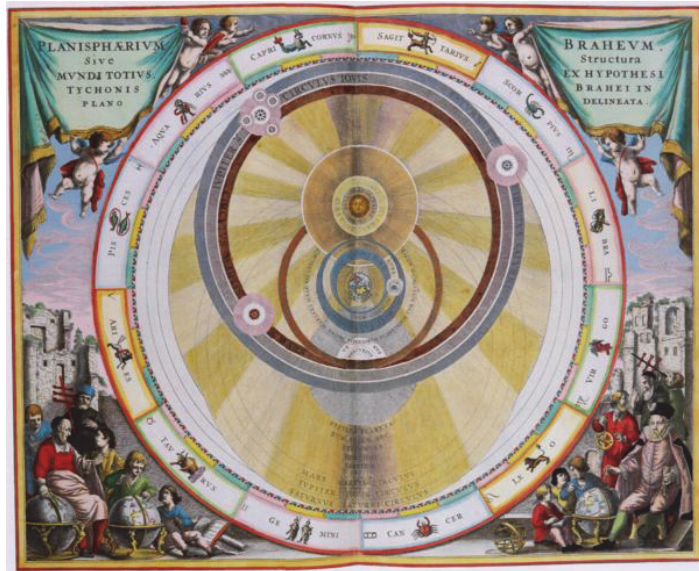
In deze modellen worden de planeten mee-gevoerd door glasachtige bolschillen die over, langs, en in elkaar bewegen.

Brahe heeft al beargu-menteerd dat zulke schillen in werkelijkheid niet bestaan (Kepler, 1995, pagina’s 16–17).

Enerzijds zouden de schillen stevig genoeg moeten zijn om de planeten te kunnen dragen, maar anderzijds moeten kometen er dwars hoorheen kunnen bewegen.

Verder zouden de bolschillen glasachtig moeten zijn, opdat we erdoorheen kunnen kijken, maar dan zouden ook onregelmatig variërende brekingsverschijnselen op moeten treden en die zijn nooit waargenomen.

Kortom, volgens Brahe bestaan die glasachtige bolschillen niet. Maar als ze niet bestaan, dan geeft het model geen verklaring voor de beweging van de planeten—hoe goed eventueel de beweging van de planeten ermee voorspeld kan worden.



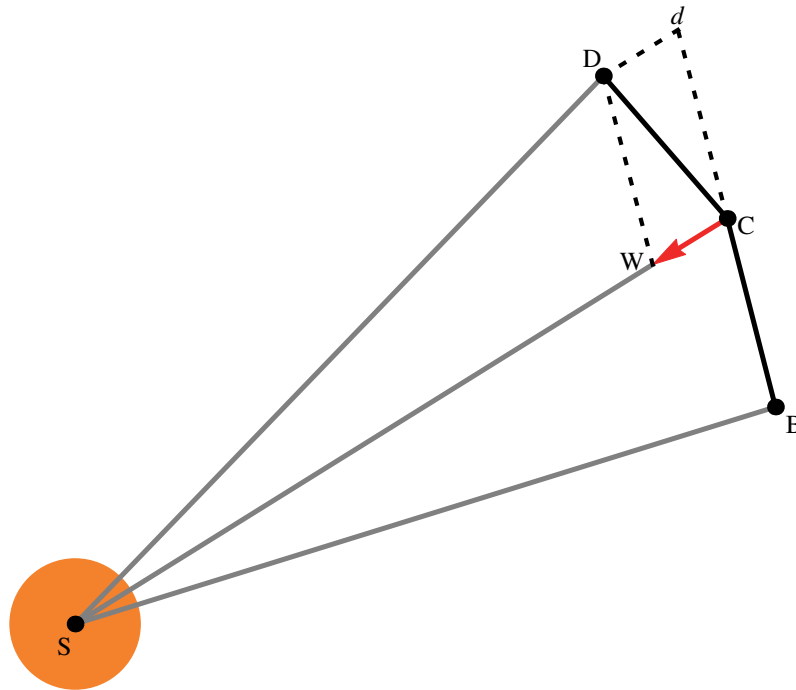
<sup>13</sup>Newton formuleert zijn traagheidsbeginsel voor alle lichamen, terwijl Kepler alleen voor *hemellichamen* het traagheidsbeginsel ‘rust’ expliciet formuleert. Er zijn aanwijzingen dat Kepler voor andere lichamen dan hemellichamen neigde naar een traagheidsbeginsel gelijkend op dat van Newton (Rosen, 1966). Waar ik het in mijn verhaal heb over ‘het’ traagheidsbeginsel van Kepler, bedoel ik zijn traagheidsbeginsel met betrekking tot hemellichamen: volharden in rust. Naar mijn indruk levert dat geen verwarring op voor mijn bespreking van Keplers fysische sterrenkunde.

<sup>14</sup>Hoewel Kepler zich er niet expliciet over uitlaat, veronderstelt hij impliciet het bestaan van een uniek stelsel of coördinatensysteem ten opzichte waarvan vastgesteld kan worden of iets in beweging is of niet. Newton, daarentegen, is zich er terdege van bewust dat wat voor de ene waarnemer een eenparige rechtlijnig beweging is voor een andere waarnemer dat niet hoeft te zijn. Aan het begin van de *Principia*, in het fameuze *Scholium* over absolute ruimte en tijd, merkt hij op: “It is certainly very difficult to find out the true motions of individual bodies and actually to differentiate them from apparent motions, because the parts of that immovable space in which the bodies truly move make no impression on the senses. Nevertheless, the case is not utterly hopeless. [...]in what follows, a fuller explanation will be given of how to determine true motions from their causes, effects, and apparent differences, and, conversely, of how to determine from motions, whether true or apparent, their causes and effects. For this was the purpose for which I composed the following treatise” (Newton, 1999, pagina’s 414–415). Het is ondoenlijk om kort te evalueren in hoeverre Newton in zijn doel geslaagd is. Ik volsta hier met een verwijzing naar een selectie uit de uitgebreide literatuur over dit onderwerp die ik als behulpzaam heb ervaren: Barbour en Bertotti (1982); Friedman (1983); Earman (1989); Assis (1999); Barbour (2000).

<sup>15</sup>Newton zelf gebruikt het besproken voorbeeld van een centripetale kracht in zijn bewijs van de perkenwet. Dit is stelling 1 in de *Principia*: “*The areas which bodies made to move in orbits describe by radii to an unmoving centre of forces [...] are proportional to the times*” (Newton, 1999, pagina 444). Dus als de kracht steeds naar een vast punt S gericht is, dan bedekt de voerstraal, gemeten vanuit S, in gelijke tijden gelijke oppervlaktes. Newton bewijst de perkenwet door aan te tonen dat twee opeenvolgende driehoeken, bijvoorbeeld de driehoek SBC in de tweede tijdstap en de driehoek SCD in de derde tijdstap, gelijke oppervlaktes hebben (zie de figuur op de volgende pagina). Het bewijs gaat in twee stappen. De eerste stap maakt gebruik van Newtons traagheidsbeginsel en de tweede stap maakt gebruik van de veronderstelling dat de oppervlakte gemeten wordt vanuit het punt waarnaar de kracht steeds gericht is (punt S).

1. Per constructie zijn de lijnstukken BC en Cd evenwijdig en even lang. Dus ligt punt d even ver boven de basislijn SC als punt B eronder ligt. Volgens de regel dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan het product van basis en halve hoogte, volgt dat de oppervlakte van driehoek SBC gelijk is aan de oppervlakte van driehoek SCd.
2. Per constructie zijn de lijnstukken CW en dD evenwijdig. Daar de kracht gericht is naar S, ligt de daardoor veroorzaakte uitwijking  $\vec{CW}$  langs SC. Dus is het lijnstuk dD evenwijdig aan de basislijn SC. Dus liggen de punten d en D even ver boven de basislijn SC. Dus volgt dat de oppervlaktes van de driehoeken SCd en SCD gelijk zijn.

Het bewijs van de perkenwet wordt vervolmaakt door op te merken dat de oppervlaktes van opeenvolgende driehoeken even groot zijn, ongeacht de grootte van de tijdstap. In de limiet dat de tijdstap naar nul nadert, volgt derhalve dat de toename van de oppervlakte per tijdseenheid constant is.



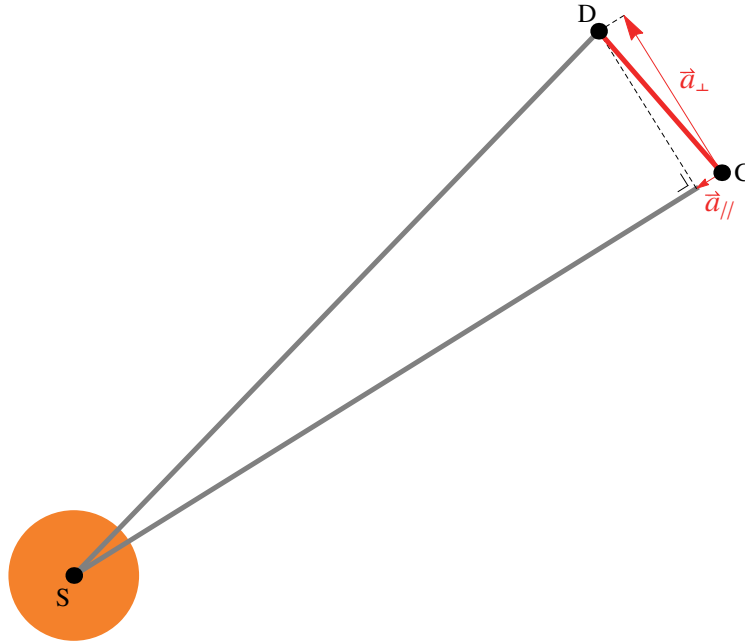
<sup>16</sup>Het is ook in Keplers geval vrij eenvoudig na te gaan welke eigenschap de kracht moet hebben opdat voldaan is aan de perkenwet, en Kepler heeft deze redenering zelf ook min of meer gegeven. De relevante eigenschap is ruimer dan die in Newtons geval. In noot 15 is aangetoond dat in Newtons geval aan de perkenwet is voldaan, als de kracht steeds gericht is langs de voerstraal (naar S toe of van S af). Dan is ook in Keplers geval aan de perkenwet voldaan, maar in triviale zin. Als immers in Keplers geval de kracht steeds gericht was langs de voerstraal, zou de resulterende beweging van het hemellichaam steeds gericht zijn langs de voerstraal, en zou de door de voerstraal bedekte oppervlakte steeds 0 blijven.

In Keplers geval kan echter ook (en niet-triviaal) aan de perkenwet voldaan zijn als de kracht wel een component loodrecht op de voerstraal heeft. Beschouw bijvoorbeeld de figuur op de volgende pagina. Daarin staat de derde tijdstap weergegeven, waarin het hemellichaam ten gevolge van de kracht een afwijking  $\overline{CD}$  in de richting van de kracht krijgt, en die afwijking ook de verplaatsing is van het hemellichaam in de derde tijdstap.

Als we de afwijking  $\overline{CD}$  ontbinden in een component  $\vec{a}_{//}$  evenwijdig aan de verbindingslijn SC met de zon en een component  $\vec{a}_{\perp}$  loodrecht op die verbindingslijn, dan volgt dat de oppervlakte van de driehoek SCD gegeven wordt door:

$$\frac{1}{2} SC \cdot |\vec{a}_{\perp}|$$

Analoog volgt voor de andere driehoeken (SAB, SBC, SDE, SEF, ...) dat de oppervlakte ervan evenredig is met het product van de voerstraal en de grootte van de loodrechte component van de afwijking. Opdat aan de perkenwet voldaan is, moet derhalve dit product een constante zijn.



Als we vervolgens de afwijking, of beter gezegd de afwijking per tijdseenheid, opvatten als een maat voor de Kepleriaanse kracht  $\vec{K}$  die de oorzaak is van de afwijking, dan moet derhalve, opdat aan de perkenwet voldaan is, het product van de voerstraal  $r$  en de grootte van de loodrechte component van de Kepleriaanse kracht constant zijn:

$$|\vec{K}_\perp| \propto \frac{1}{r}$$

Volgens Kepler werken twee krachten op een hemellichaam: een draaikolk-invloed en een magnetische invloed. De eerste staat loodrecht op de voerstraal en de tweede is eraan evenwijdig. Opdat aan de perkenwet voldaan is, moet de grootte van de draaikolk-invloed dus omgekeerd evenredig zijn aan de afstand tot de zon.

<sup>17</sup>Newtons tweede bewegingswet luidt: “*A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line in which that force is impressed*” (Newton, 1999, pagina 416). Volgens een eerdere definitie moet ‘motion’ hier als volgt gelezen worden: “*Quantity of motion is a measure of motion that arises from the velocity and the quantity of matter jointly*” (Newton, 1999, pagina 404). Dat wil zeggen, onder ‘hoeveelheid beweging’ verstaat Newton het product van snelheid  $\vec{v}$  en hoeveelheid materie (massa)  $m$ , wat in het Nederlands ‘impuls’ genoemd wordt:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Volgens de tweede bewegingswet is de uitgeoefende kracht evenredig aan de mate van impulsverandering:  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ . Voor het geval de massa van het voorwerp waarop de kracht werkt niet verandert, wordt de tweede wet:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

<sup>18</sup>Hetzelfde punt kan gemaakt worden in termen van *differentievergelijkingen*, zoals ik hieronder voor de gevallen van Kepler en Newton achtereenvolgens laat zien.

### Kepler

Maak een Taylor-ontwikkeling van de positie  $\vec{r}$  van het voorwerp rond tijdstip  $t$ :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + (\Delta t) \dot{\vec{r}}(t) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

Met behulp van  $\vec{K} = \ell \ddot{\vec{r}}$  volgt:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \underbrace{\vec{r}(t)}_{\text{onveranderde positie}} + \underbrace{(\Delta t) \frac{\vec{K}(t)}{\ell}}_{\text{afwijking door kracht}} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

Bij verwaarlozing van termen van de orde  $(\Delta t)^2$ , is de positie op tijdstip  $t + \Delta t$  de vectoriële som van twee bijdragen:

1. De positie op tijdstip  $t$ . Dit is de positie waar het hemellichaam was, en volgens Keplers traagheidsbeginsel ook zou blijven als er geen kracht werkte.
2. Een afwijking ten gevolge van de kracht, in de richting van de kracht. Een voordeel van deze formule-benadering is dat hieruit onmiddellijk een uitdrukking volgt voor de door de kracht veroorzaakte afwijking in een tijdstap, en in het bijzonder voor hoe deze afwijking afhangt van de grootte van de tijdstap.

Als de beweging van het voorwerp stapsgewijs berekend wordt op basis van deze twee bijdragen, dan wordt per stap een fout gemaakt van de orde  $(\Delta t)^2$ . De onnauwkeurigheid die geïntroduceerd wordt door al die fouten bij elkaar kan echter willekeurig klein gemaakt worden door de tijdstap  $\Delta t$  voldoende klein te nemen.

### Newton

Voor Newtons geval moeten we de Taylor-ontwikkeling iets verder doorzetten:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + (\Delta t) \dot{\vec{r}}(t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{r}}(t) + \mathcal{O}((\Delta t)^4)$$

Als we hier de vergelijking bij optellen die we krijgen door vervanging van  $\Delta t$  door  $-\Delta t$ , dan volgt:

$$\vec{r}(t + \Delta t) + \vec{r}(t - \Delta t) = 2\vec{r}(t) + (\Delta t)^2 \ddot{\vec{r}}(t) + \mathcal{O}((\Delta t)^4)$$

Met behulp van  $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$  volgt na herschikking:

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t) - \vec{r}(t - \Delta t)}_{\text{onveranderde snelheid}} + \underbrace{(\Delta t)^2 \frac{\vec{F}(t)}{m}}_{\text{afwijking door kracht}} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)$$

Bij verwaarlozing van termen van de orde  $(\Delta t)^4$ , is de verplaatsing in het tijdsinterval  $[t, t + \Delta t]$  de vectoriële som van twee bijdragen:

1. Een verplaatsing die gelijk is aan de verplaatsing in het tijdsinterval  $[t - \Delta t, t]$ . Dit correspondeert met hoe het voorwerp volgens Newtons traagheidsbeginsel verder zou bewegen als er geen kracht werkte: met onveranderde snelheid recht door.

2. Een afwijking ten gevolge van de kracht, in de richting van de kracht. Ook nu levert de formule-benadering onmiddellijk een uitdrukking op voor de door de kracht veroorzaakte afwijking in een tijdstap, en in het bijzonder voor hoe deze afwijking afhangt van de grootte van de tijdstap.

Als de beweging van het voorwerp stapsgewijs berekend wordt op basis van deze twee bijdragen, dan wordt per stap een fout gemaakt van de orde  $(\Delta t)^4$ . De onnauwkeurigheid die geïntroduceerd wordt door al die fouten bij elkaar kan echter willekeurig klein gemaakt worden door de tijdstap  $\Delta t$  voldoende klein te nemen.

<sup>19</sup>In noot 21 bestudeer ik de oplossingsruimte van de Newtoniaanse bewegingsvergelijking. In deze noot doe ik het omgekeerde: afleiden dat, om de waargenomen planeetbeweging te verkrijgen, de kracht van de zon op de planeet aantrekkend moet zijn en qua grootte omgekeerd evenredig moet zijn aan het kwadraat van hun onderlinge afstand. Gemakshalve beschouw ik het simpele geval dat we alleen te maken hebben met de krachten die de zon en één enkele planeet op elkaar uitoefenen, en dat we de planeet en de zon kunnen opvatten als puntmassa's.

Het uitgangspunt van de afleiding is dat geldt voor de waargenomen planeetbeweging (in een stelsel dat niet roteert ten opzichte van een inertiaalstelsel):

- De baan van de planeet om de zon is een ellips waarbij de zon in één van de brandpunten staat.
- Het tempo waarin de baan doorlopen wordt, wordt gegeven door de perkenwet.

Op basis hiervan ga ik aantonen dat geldt voor de kracht  $\vec{F}^{z \rightarrow p}$  van de zon op de planeet:

$$\vec{F}^{z \rightarrow p} = -c \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_z)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_z|^3},$$

met  $c$  een positieve constante,  $\vec{r}_p$  de positie van de planeet en  $\vec{r}_z$  de positie van de zon. Als we invoeren:

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_z \quad r = |\vec{r}_p - \vec{r}_z| \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

dan is dus aan te tonen:

$$\text{Er is een constante } c > 0 \text{ zodanig dat: } \vec{F}^{z \rightarrow p} = -c \frac{\vec{r}}{r^3} = -c \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

We beginnen met eerst een vergelijking af te leiden voor de positie  $\vec{r}$  van de planeet ten opzichte van de zon. Volgens Newtons tweede bewegingswet geldt (in een inertiaalstelsel), met  $\vec{F}^{p \rightarrow z}$  de kracht van de planeet op de zon:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{\vec{r}}_p &= \vec{F}^{z \rightarrow p} \\ m_z \ddot{\vec{r}}_z &= \vec{F}^{p \rightarrow z} \end{aligned}$$

Er volgt dus:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_z = \frac{1}{m_p} \vec{F}^{z \rightarrow p} - \frac{1}{m_z} \vec{F}^{p \rightarrow z}$$

Newtons derde bewegingswet luidt: *“To any action there is always an opposite and equal reaction; in other words, the actions of two bodies upon each other are always equal and always opposite in direction”* (Newton, 1999, pagina 417). Dus:

$$\vec{F}^{p \rightarrow z} = -\vec{F}^{z \rightarrow p}$$

We vinden als vergelijking voor  $\vec{r}$  (die geldt in elk stelsel dat *niet* roteert ten opzichte van inertiaalstelsels):

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{z \rightarrow p}$$

Hierbij is de zogenaamde gereduceerde massa  $\mu$  gedefinieerd door:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_z} \quad \text{ofwel} \quad \mu = \frac{m_p m_z}{m_p + m_z}$$

Aan te tonen is nu voor het geval dat  $\vec{r}(t)$  een ellips beschrijft zodanig dat aan de perkenwet voldaan is:

$$\text{Er is een constante } d > 0 \text{ zodanig dat: } \ddot{\vec{r}} = -d \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Alleen dan is immers voldaan aan (1).

Beschouw nu een stelsel waarbij de zon zich in de oorsprong bevindt, maar dat verder niet roteert ten opzichte van inertiaalstelsels. In dat stelsel is de beweging van de planeet dus een ellips. Kies in dat stelsel het vlak waarin de planeet beweegt als het  $xy$ -vlak, en kies in dat vlak poolcoördinaten zodanig dat de afstand van de planeet tot de zon het kleinst is voor  $\varphi = 0$ . Dan geldt in dat stelsel:

$$\vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ waarbij} \quad (2)$$

$$r(t) = \frac{c_1}{1 + e \cos \varphi(t)} \quad (3)$$

Hierbij is  $e$  de eccentriciteit van de ellips. Verder is  $c_1$  een positieve constante. Hoewel we daar verder geen gebruik van zullen maken, is  $c_1$  uit te drukken in de halve lange as  $a$  en de eccentriciteit van de ellips:  $c_1 = a(1 - e^2)$ .

De toename per tijdseenheid van de door de voerstraal bedekte oppervlakte wordt gegeven door:

$$\frac{1}{2} r^2(t) \dot{\varphi}(t)$$

Gegeven dat aan de perkenwet voldaan is, volgt dus dat er een constante  $c_2$  is zodanig dat:

$$r^2(t) \dot{\varphi}(t) = c_2 \quad (4)$$

Hoewel we daar verder geen gebruik van zullen maken, is  $c_2$  uit te drukken in de halve lange as, de eccentriciteit en de omlooptijd  $T$  van de planeet:  $c_2 = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$ .

Uit (2) volgt eenvoudig door herhaalde toepassing van de productregel:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \{\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\varphi}^2(t)\} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \{2\dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) + r(t) \ddot{\varphi}(t)\} \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Met behulp van (3) en (4) volgt:

$$\dot{r}(t) = \frac{c_1 e \sin \varphi(t)}{\{1 + e \cos \varphi(t)\}^2} \dot{\varphi}(t) = \frac{c_2}{c_1} e \sin \varphi(t)$$

$$\ddot{r}(t) = c_2^2 \frac{1}{r^3(t)} - \frac{c_2^2}{c_1} \frac{1}{r^2(t)}$$

$$\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\varphi}^2(t) = -\frac{c_2^2}{c_1} \frac{1}{r^2(t)}$$

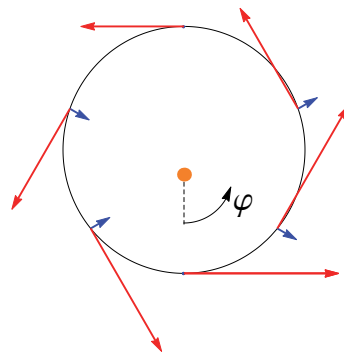
Verder volgt uit (4):

$$2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt} \{r^2(t)\dot{\varphi}(t)\} = 0$$

We vinden tenslotte hetgeen aan te tonen was:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{c_2^2}{c_1} \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{c_2^2}{c_1} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

<sup>20</sup>In noot 21 bestudeer ik de oplossingsruimte van de Kepleriaanse bewegingsvergelijking. In deze noot doe ik het omgekeerde: afleiden dat, om de waargenomen planeetbeweging te verkrijgen, moet gelden voor de Kepleriaanse kracht dat de component die loodrecht staat op de voerstraal (in de richting van de hoek  $\varphi$ ) wat grootte betreft omgekeerd evenredig is aan de onderlinge afstand, terwijl de component die gericht is langs de voerstraal aantrekkend of afstotend is naar mate van de sinus van de hoek  $\varphi$ :



$$\vec{K} = c_1 \frac{1}{r} \hat{\varphi} + c_2 \sin \varphi \hat{r} \quad (5)$$

Net als in noot 19, is het uitgangspunt van de afleiding dat geldt voor de waargenomen planeetbeweging (in het impliciet door Kepler veronderstelde stelsel waarin de zon stilstaat, en de overige hemellichamen alleen bewegen voor zover er een kracht op werkt):

- De baan van een planeet om de zon is een ellips waarbij de zon in één van de brandpunten staat.
- Het tempo waarin de baan doorlopen wordt, wordt gegeven door de perkenwet.

Als we de oorsprong van het stelsel in de zon kiezen, dan geldt de Kepleriaanse bewegingsvergelijking:

$$\vec{K} = \ell \dot{\vec{r}}$$

Kies vervolgens het  $xy$ -vlak als het vlak waarin de planeet beweegt, de  $\varphi$ -richting als de draaizin van de zon, en de hoek  $\varphi = 0$  waar de afstand van de planeet tot de zon het kleinst is, dan is dus aan te tonen voor het geval dat  $\vec{r}(t)$  een ellips beschrijft zodanig dat aan de perkenwet is voldaan:

$$\text{Er zijn een constantes } d_1 \text{ en } d_2 \text{ zodanig dat: } \dot{\vec{r}} = d_1 \frac{1}{r} \hat{\varphi} + d_2 \sin \varphi \hat{r} \quad (6)$$

Alleen dan namelijk is voldaan aan (5).

Net als in noot 19 geldt, als  $\vec{r}(t)$  een ellips beschrijft zodanig dat aan de perkenwet voldaan is:

$$\vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$r(t) = \frac{c_1}{1 + e \cos \varphi(t)} \quad (8)$$

$$r^2(t) \dot{\varphi}(t) = c_2 \quad (9)$$



Uit (7) volgt eenvoudig met de productregel:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} + r(t) \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Met behulp van (8) en (9) volgt:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{c_1 e \sin \varphi(t)}{\{1 + e \cos \varphi(t)\}^2} \dot{\varphi}(t) = \frac{c_2}{c_1} e \sin \varphi(t) \\ r(t) \dot{\varphi}(t) &= c_2 \frac{1}{r(t)} \end{aligned}$$

We vinden tenslotte wat aan te tonen was:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{c_2}{c_1} e \sin \varphi(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \frac{1}{r(t)} \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c_2}{c_1} e \sin \varphi \hat{r} + c_2 \frac{1}{r} \hat{\varphi}$$

<sup>21</sup>In deze noot bestudeer ik de oplossingen van de respectieve bewegingsvergelijkingen van Kepler en Newton, alsmede de relaties ertussen.

### Newtoniaanse oplossingen

De bewegingsvergelijking voor de positie van het hemellichaam ten opzichte van de positie van de zon luidt in Newtons geval (in een stelsel dat niet roteert ten opzichte van inertiaalstelsels):

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{m_z m_p}{r^2} \hat{r} \quad (10)$$

Er geldt dat iedere oplossing een curve in een vlak beschrijft, wat we als het  $xy$ -vlak kiezen. Verder geldt dat er tenminste één tijdstip is waarop de snelheid loodrecht staat op de voerstraal. Als we  $t = 0$  voor zo'n tijdstip kiezen, en bovendien de  $x$ -as en de  $y$ -as zodanig kiezen dat de planeet zich op  $t = 0$  bevindt op de positieve  $x$ -as en een snelheid heeft die  $\vec{v}$  is of gericht is langs de positieve  $y$ -richting, dan zijn de beginvoorwaarden (met  $r_0 > 0$  en  $v_0 \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (r_0, 0, 0) \\ \dot{\vec{r}}(0) &= (0, v_0, 0) \end{aligned}$$

In termen van de gebruikelijke poolcoördinaten, en met  $M = m_z + m_p$ , luidt de bewegingsvergelijking:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned}$$

met als beginvoorwaarden:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 & \varphi(0) &= 0 \\ \dot{r}(0) &= 0 & \dot{\varphi}(0) &= \frac{v_0}{r_0} \end{aligned}$$

De oplossing hiervan is (afgezien van het speciale geval  $v_0 = 0$  dat we apart zullen bespreken):

$$r(t) = \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\varphi(t)},$$

waarbij geldt voor de eccentriciteit:  $e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1$ ,

en waarbij  $\varphi(t)$  impliciet gedefinieerd is door:

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\alpha}{(1+e\cos\alpha)^2} = \frac{v_0 t}{r_0(1+e)^2}$$

### Kepleriaanse oplossingen

De bewegingsvergelijking van Kepler luidt (in het impliciet door Kepler veronderstelde stelsel waarin de zon stilstaat in de oorsprong):

$$\ell \dot{\vec{r}} = \alpha \frac{\omega}{r} \hat{\varphi} + \beta s \sin\varphi \hat{r}$$

De coördinaten in het vlak waarin het hemellichaam beweegt zijn hier zodanig gekozen dat de zon roteert in de  $\varphi$ -richting (of ook, zodanig dat  $\omega > 0$ ), en zodanig dat voor  $\varphi = 0$  de oriëntatie van de magneet in het hemellichaam loodrecht staat op de voerstraal. In termen van de gebruikelijke poolcoördinaten luidt de bewegingsvergelijking:

$$\begin{aligned} \dot{r} - \frac{\beta s}{\ell} \sin\varphi &= 0 \\ r^2 \dot{\varphi} - \frac{\alpha \omega}{\ell} &= 0 \end{aligned}$$

Verder is er tenminste één tijdstip waarop de oriëntatie van de magneet loodrecht staat op de voerstraal. We kiezen zo'n tijdstip voor  $t = 0$ . De beginvoorwaarden zijn dan:

$$r(0) = r_0 \quad \varphi(0) = 0$$

De oplossing hiervan is (afgezien van het speciale geval  $\frac{\alpha \omega}{\beta s} \frac{1}{r_0} = 1$  dat we apart zullen bespreken):

$$r(t) = \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\varphi(t)},$$

waarbij geldt voor de eccentriciteit:  $e = \left(\frac{\alpha \omega}{\beta s} \frac{1}{r_0} - 1\right)^{-1}$ ,

en waarbij  $\varphi(t)$  impliciet gedefinieerd is door:

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\alpha}{(1+e\cos\alpha)^2} = \frac{\alpha \omega t}{\ell r_0^2 (1+e)^2}$$

### Vergelijking van de Kepleriaanse en Newtoniaanse oplossingen

Afgezien van enkele speciale gevallen, zijn zowel de Newtoniaanse als de Kepleriaanse oplossingen van de vorm:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2} &= \frac{At}{r_0(1+e)^2}; \\ r(t) &= \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\varphi(t)}, \end{aligned}$$

De respectieve waarden van de constante  $A$  en de eccentriciteit  $e$  zijn daarbij als weergegeven in de volgende tabel.

	$A$	$e$
Kepler	$\frac{\alpha \omega}{\ell r_0}$	$\left(\frac{\alpha \omega}{\beta s r_0} - 1\right)^{-1}$
Newton	$v_0$	$\frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1$

Als dus de waarden van de parameters zodanig gekozen kunnen worden dat de waarden van  $A$  en  $e$  hetzelfde zijn, dan zijn de oplossingen identiek. Uit de tabel volgt direct dat voor alle waarden van de Newtoniaanse parameters (met uitzondering van  $v_0 = 0$ ) waarden voor de Kepleriaanse parameters gevonden worden, zodanig dat de Kepleriaanse oplossing samenvalt met de Newtoniaanse oplossing:

$$\frac{\alpha \omega}{\ell} = r_0 v_0 \quad (11)$$

$$\frac{\beta s}{\ell} = v_0 \left(1 - \frac{\gamma M}{r_0 v_0^2}\right) \quad (12)$$

Omgekeerd is dit echter niet het geval. Dit is al te zien in de tabel. Bij Newton kan de eccentriciteit alleen maar waarden groter dan  $-1$  aannemen; bij Kepler alle waarden behalve  $-1$  (en in het bijzonder voor  $\beta s > \frac{\alpha \omega}{r_0}$  ook waarden kleiner dan  $-1$ ). Hetzelfde volgt ook door inverteren van de relaties (11) en (12):

$$v_0 = \frac{\alpha \omega}{\ell r_0}$$

$$\gamma M = \frac{\alpha \omega}{\ell^2} \left(\frac{\alpha \omega}{r_0} - \beta s\right)$$

Opdat  $\gamma M = \gamma(m_z + m_p) > 0$ , zoals nodig voor een Newtoniaanse oplossing met positieve massa's, moet gelden:  $\beta s < \frac{\alpha \omega}{r_0}$ . Voor  $\beta s \geq \frac{\alpha \omega}{r_0}$  verwachten we derhalve Kepleriaanse oplossingen die geen Newtoniaanse oplossingen zijn. Verderop zullen we zien dat dit inderdaad het geval is.

### Newtoniaanse oplossingen die ook Kepleriaanse oplossingen zijn

Voor een gegeven afstand  $r_0$  tussen zon en hemellichaam op tijdstip  $t = 0$ , zijn de Newtoniaanse oplossingen te classificeren in termen van de snelheid  $v_0$  op tijdstip  $t = 0$ . In de linkerfiguren hieronder staan de banen van twee Newtoniaanse oplossingen weergegeven, waarbij de blauwe pijl de snelheid op tijdstip  $t = 0$  voorstelt. Voor de twee weergegeven gevallen geldt:  $0 < v_0 < \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}$ . Voor de eccentriciteit geldt dan:  $-1 < e < 0$ . De bijbehorende banen zijn ellipsen met de zon in een brandpunt, zodanig dat op  $t = 0$  het hemellichaam zich bevindt in het aphelium (de positie op de baan waar de afstand tussen de zon en het hemellichaam het grootst is). De snelheid  $v_0$  is in deze gevallen zo klein dat het effect van de aantrekkende zwaartekracht meteen tot een afname leidt van de afstand tot de zon. Hoe kleiner  $v_0$ , des te dichter het hemellichaam langs de zon scheert.



Deze Newtoniaanse oplossingen zijn ook Kepleriaanse oplossingen, voor parameters die gegeven worden door (11) en (12):

$$\frac{\alpha\omega}{\ell} = r_0 v_0$$

$$\frac{\beta s}{\ell} = v_0 \left(1 - \frac{\gamma M}{r_0 v_0^2}\right)$$

Merk in het bijzonder op dat in de onderhavige gevallen:  $s < 0$ . In de rechterfiguren onderaan de vorige pagina wordt de waarde van  $\omega$ , die een maat is voor de sterkte van de draaikolk-invloed, gerepresenteerd door de lengte van de rode cirkelboog om ‘de zon’. De sterkte  $|s|$  van de magneet in het hemellichaam wordt gerepresenteerd door de lengte van ‘de magneet’. Dat de sterkte  $s$  negatief is, wordt daardoor gerepresenteerd dat de noordpool (rood) zich links van de zuidpool (groen) bevindt. Het hemellichaam wordt onmiddellijk na  $t = 0$  door de magnetische invloed naar de zon toe getrokken, omdat de noordpool zich dan dichterbij de zon bevindt. Terwijl de afstand tot de zon afneemt, neemt de sterkte van de draaikolk-invloed toe. Daardoor wordt het hemellichaam uiteindelijk toch om de zon heen geslingerd.

In onderstaande figuren staat het speciale geval weergegeven dat bij Newton (links) geldt:  $v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}$ . Bij Kepler (rechts) volgt dan voor de corresponderende Kepleriaanse parameters uit (11) en (12):  $\frac{\alpha\omega}{\ell} = \sqrt{\gamma M r_0}$  en  $s = 0$ . Voor de eccentriciteit van de bijbehorende baan geldt:  $e = 0$ . De baan van het hemellichaam is een cirkel met de zon in het middelpunt, en de cirkel wordt eenparig doorlopen.

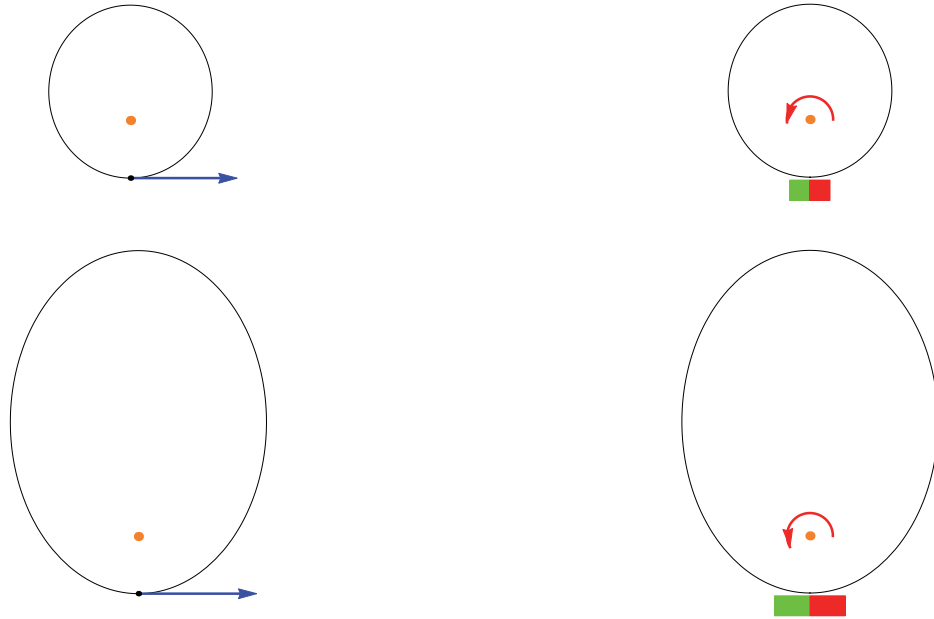


Dat het om een eenparige cirkelbeweging gaat is het eenvoudigst in te zien bij Kepler. Daar  $s = 0$ , bevindt zich in dit geval geen magneet in het hemellichaam. Dus werkt alleen de draaikolk-invloed. Bedenk verder dat met Keplers keuze voor het traagheidsbeginsel de snelheid steeds evenredig is aan de kracht. Gegeven dat de draaikolk-invloed in de azimuthale richting wijst, gaat de beweging ook in de azimuthale richting. Vandaar een *cirkel*. Daar de afstand tot de zon gelijk blijft, blijft de grootte van de draaikolk-invloed gelijk, en dus is de snelheid constant. Vandaar een *eenparige* cirkelbeweging.

In de figuren bovenaan de volgende pagina staan enkele gevallen weergegeven waarvoor bij Newton geldt:  $\sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}$ . Bij Kepler worden de corresponderende Kepleriaanse parameters weer gegeven door (11) en (12). Hieruit volgt onmiddellijk dat in de onderhavige gevallen de sterkte  $s$  van de magneet positief is, hetgeen in de figuren daardoor is gerepresenteerd dat de zuidpool zich links van de noordpool bevindt. Verder volgt in de onderhavige gevallen voor de verhouding van de sterktes van de magnetische invloed en de draaikolk-invloed:

$$0 < \frac{\beta s}{\alpha\omega} < \frac{1}{2r_0}$$

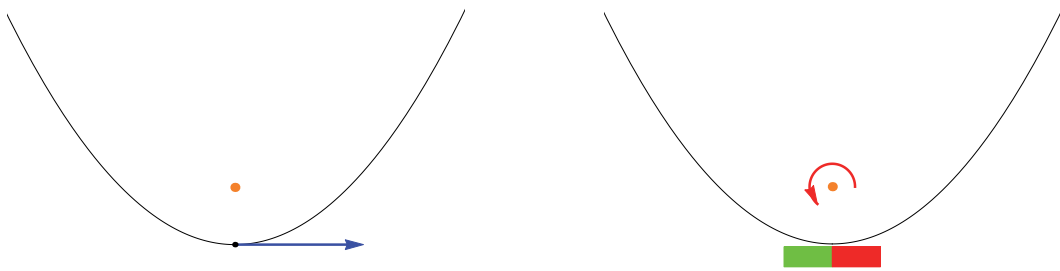
Voor de eccentriciteit van de bijbehorende banen geldt:  $0 < e < 1$ . De banen zijn ellipsen met de zon in een brandpunt, zodanig dat op  $t = 0$  het hemellichaam zich bevindt in het perihelium (de positie op de baan waar de afstand tussen de zon en het hemellichaam het kleinst is).



Bij Newton kan opgemerkt worden dat de snelheid  $v_0$  in deze gevallen steeds groot genoeg is om ervoor te zorgen dat de aantrekkende zwaartekracht niet meteen tot een afname leidt van de afstand tot de zon, maar anderzijds klein genoeg om ervoor te zorgen dat uiteindelijk het hemellichaam toch nog afbuigt en gebonden blijft aan de zon. Hoe groter  $v_0$ , des te verder het hemellichaam van de zon af geraakt.

Bij Kepler kan opgemerkt worden dat het hemellichaam onmiddellijk na  $t = 0$  weliswaar door de magnetische invloed van de zon af geduwd wordt (omdat de zuidpool zich dan dicht bij de zon bevindt), maar dat de draaikolk-invloed sterk genoeg is om het hemellichaam uiteindelijk toch nog om de zon heen te slingeren.

In onderstaande figuren staat het speciale geval weergegeven dat bij Newton geldt:  $v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}$ . Bij Kepler volgt dan uit de corresponderende Kepleriaanse parameters (11) en (12) voor de verhouding van de sterktes van de magnetische invloed en de draaikolk-invloed:  $\frac{\beta s}{\alpha \omega} = \frac{1}{2r_0}$ . Voor de eccentriciteit van de bijbehorende baan geldt:  $e = 1$ . De baan van het hemellichaam is een parabool.



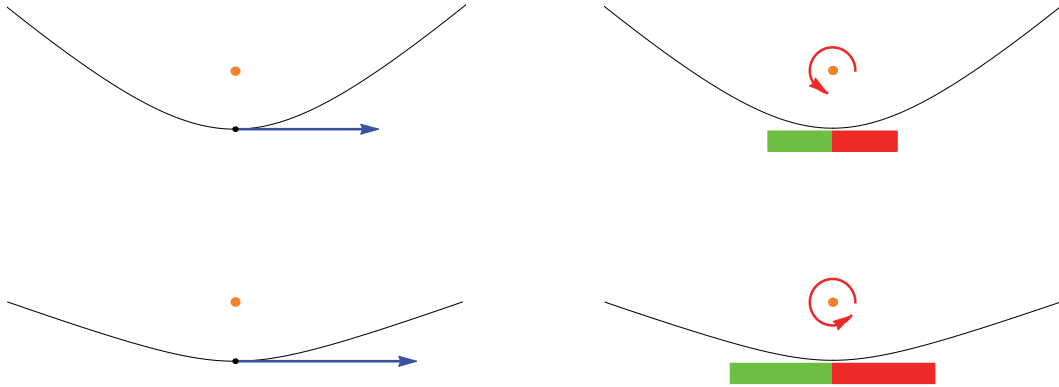
Bij Newton kan opgemerkt worden dat precies bij deze waarde van  $v_0$  de zwaartekracht net niet sterk genoeg is om het hemellichaam aan zich te binden. Het hemellichaam buigt weliswaar steeds verder af, maar de kromme sluit zich net niet.

Bij Kepler kan opgemerkt worden dat precies bij deze verhouding van de sterkte van de magnetische invloed en de sterkte van de draaikolk-invloed een delicaat evenwicht bestaat tussen beide invloeden. Het hemellichaam wordt door de magnetische invloed verder en verder weggeduwd, maar wordt door de draaikolk-invloed tegelijkertijd verder en verder rondgedraaid.

In onderstaande figuren staan enkele gevallen weergegeven waarvoor bij Newton geldt:  $v_0 > \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}$ . Bij Kepler volgt dan uit de corresponderende Kepleriaanse parameters (11) en (12) voor de verhouding van de sterktes van de magnetische invloed en de draaikolk-invloed:

$$\frac{1}{2r_0} < \frac{\beta s}{\alpha \omega} < \frac{1}{r_0}$$

Voor de eccentriciteit van de bijbehorende banen geldt:  $e > 1$ . De bijbehorende banen zijn hyperbolen met de zon in een brandpunt.



Bij Newton kan opgemerkt worden dat de snelheid  $v_0$  in deze gevallen zo groot is dat de zwaartekracht nauwelijks grip krijgt op het hemellichaam. In het begin wordt het nog wat afgebogen, maar na een tijdje beweegt het vrijwel ongehinderd verder, daar de zwaartekracht op grote afstand heel zwak is. Het hemellichaam beweegt uiteindelijk steeds verder van de zon af in een vrijwel rechte lijn (langs een asymptoot van de hyperbool) en met een vrijwel constante snelheid (hoe groter de snelheid  $v_0$ , des te dichter de uiteindelijke hoek nadert tot  $\frac{\pi}{2}$ ). Bedenk immers dat volgens Newtons traagheidsbeginsel het hemellichaam met vrijwel dezelfde snelheid vrijwel rechtdoor blijft bewegen als er vrijwel geen kracht meer op werkt.

Bij Kepler kan opgemerkt worden dat de magnetische invloed in deze gevallen de bovenhand heeft over de draaikolk-invloed. Hoewel de draaikolk-invloed begint met het hemellichaam rond te slingeren, wordt het al vrij snel zo sterk door de magnetische invloed naar buiten gedruwd dat de draaikolk-invloed er nauwelijks nog invloed op heeft. Bedenk immers dat bij toenemende afstand tot de zon de sterkte van de draaikolk-invloed afneemt terwijl de magnetische invloed niet in sterkte afneemt. De hoek  $\varphi$  neemt vanaf  $t = 0$  weliswaar steeds toe, maar nadert asymptotisch naar een waarde  $\varphi_0$  tussen  $\frac{\pi}{2}$  en  $\pi$ , corresponderend met de asymptoot van de betreffende hyperbool (hoe dichter de verhouding van de sterktes nadert tot  $\frac{1}{r_0}$ , hoe dichter de hoek  $\varphi_0$  nadert tot  $\frac{\pi}{2}$ ). Het hemellichaam beweegt uiteindelijk alsof alleen nog de magnetische invloed erop werkt, met een Kepleriaanse kracht die in de loop van de tijd meer en meer nadert tot de constante kracht  $\beta s \sin \varphi_0 \hat{r}_0$ . Zo'n vrijwel constante Kepleriaanse kracht veroorzaakt een vrijwel eenparige rechtlijnige beweging in de richting  $\varphi_0$ .

### Een Newtoniaanse oplossing die geen Kepleriaanse oplossing is

Bij Newton hebben we ook nog te maken met het speciale geval dat  $v_0 = 0$ . De planeet beweegt dan met een toenemende versnelling recht op de zon af. We hebben hier te maken met een simpele valbeweging.



Deze Newtoniaanse oplossing is geen Kepleriaanse oplossing. Hooguit kan bij Kepler opgemerkt worden dat de simpele valbeweging steeds beter benaderd wordt in de volgende limiet:

$$\frac{\alpha\omega}{\ell} \downarrow 0 \quad \text{en} \quad \frac{\beta s}{\ell} \rightarrow -\infty$$

zodanig dat  $\frac{\alpha\omega}{\ell} \frac{\beta s}{\ell} \rightarrow -\gamma M$



### Kepleriaanse oplossingen die geen Newtoniaanse oplossingen zijn

De voorgaande bespreking suggereert dat er ook nog Kepleriaanse oplossingen zijn die geen Newtoniaanse oplossingen zijn, namelijk die gevallen waarin geldt voor de verhouding van de sterktes van de magnetische invloed en de draaikolk-invloed:

$$\frac{\beta s}{\alpha\omega} \geq \frac{1}{r_0}$$

Dit blijkt inderdaad het geval te zijn.

Onderstaande figuur correspondeert met het geval  $\frac{\beta s}{\alpha\omega} = \frac{1}{r_0}$ . In dit speciale geval geldt voor punten van de weergegeven lijn, die op afstand  $r_0$  van de zon loopt:

- De componenten van de draaikolk-invloed en de magnetische invloed loodrecht op die lijn heffen elkaar precies op.
- De componenten evenwijdig aan die lijn tellen op tot een constante kracht.



Punten op de lijn worden immers geparametriseerd door:

$$(r_0, r_0 \tan \varphi) \quad \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

En in die punten geldt voor de componenten van de draaikolk-invloed en de magnetische invloed loodrecht op die lijn:

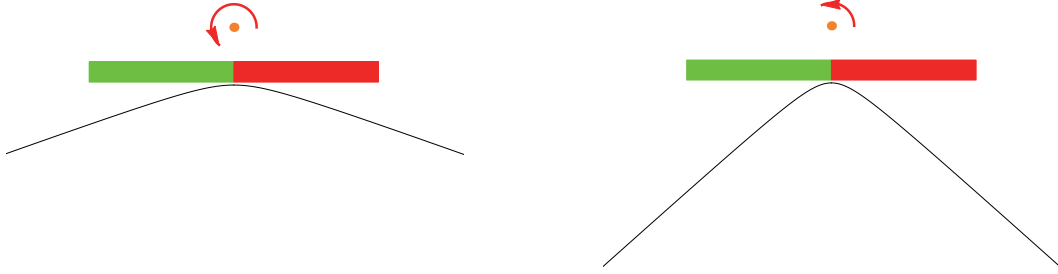
$$-\frac{\alpha\omega}{r_0} \cos \varphi \sin \varphi \quad \text{resp.} \quad \beta s \cos \varphi \sin \varphi$$

Voor de componenten van de draaikolk-invloed en de magnetische invloed evenwijdig aan die lijn volgt:

$$\frac{\alpha\omega}{r_0} \cos^2 \varphi \quad \text{resp.} \quad \beta s \sin^2 \varphi$$

Voor het geval  $\frac{\beta s}{\alpha\omega} = \frac{1}{r_0}$  heffen de loodrechte componenten elkaar op en tellen de evenwijdige componenten op tot:  $\beta s = \frac{\alpha\omega}{r_0}$ . Bij zo'n Kepleriaanse kracht is de resulterende beweging een eenparige beweging langs de lijn.

Onderstaande figuren corresponderen met gevallen  $\frac{\beta s}{\alpha \omega} > \frac{1}{r_0}$ . Voor de eccentriciteit geldt dan:  $e < -1$ . De baan is de ‘onderste’ branche van een hyperbool, met de zon in een brandpunt.



In deze gevallen heeft de magnetische invloed meteen de bovenhand. De draaikolk-invloed slaagt er zelfs niet in het hemellichaam naar ‘boven’ te bewegen. De hoek  $\varphi$  neemt vanaf  $t = 0$  weliswaar steeds toe, maar nadert asymptotisch naar een waarde  $\varphi_0$  tussen  $0$  en  $\frac{\pi}{2}$ , corresponderend met de asymptoot van de betreffende hyperbool (hoe sterker de magnetische invloed is ten opzichte van de draaikolk-invloed, des te dichter de hoek  $\varphi_0$  nadert tot  $0$ ). Het hemellichaam beweegt uiteindelijk alsof alleen nog de magnetische invloed erop werkt, met een Kepleriaanse kracht die in de loop van de tijd meer en meer nadert tot de vrijwel constante kracht  $\beta s \sin \varphi_0 \hat{r}_0$ . Zo’n vrijwel constante Kepleriaanse kracht veroorzaakt een vrijwel eenparige rechtlijnige beweging.

Tenslotte kan nog opgemerkt worden dat ook aan de zojuist besproken Kepleriaanse oplossingen (rechte lijn en onderste branches van hyperbolen) toch nog een (enigszins geforceerde) Newtoniaanse interpretatie gegeven kan worden.

$$m_z = 0$$



De rechte-lijn oplossing, bijvoorbeeld, is een Newtoniaanse oplossing voor het geval de massa van de zon de waarde  $0$  had. In dat geval, namelijk, zou er geen kracht op het hemellichaam werken, en zou het volgens Newtons traagheidsbeginsel met constante snelheid in een rechte lijn bewegen.

De onderste branches van hyperbolen zijn oplossingen van de Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen voor het geval de zon en het hemellichaam elkaar zouden *afstoten* met een kracht die afneemt volgens het kwadraat van hun onderlinge afstand. Veronderstel dus dat de krachtwet voor de zon en het hemellichaam bepaald werd door ‘ladingen’  $g_z$  en  $g_p$ , in plaats van hun massa’s  $m_z$  en  $m_p$ , waarbij die ladingen zowel negatief als positief kunnen zijn. In plaats van (10) krijgen we als bewegingsvergelijking:

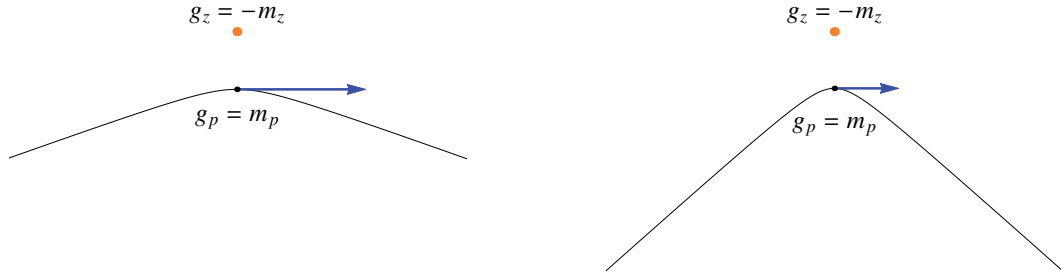
$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{g_z g_p}{r^2} \hat{r}$$

Voor het geval de lading van de zon negatief is, zeg  $g_z = -m_z$ , maar de lading van het hemellichaam positief, zeg  $g_p = m_p$ , wordt de bewegingsvergelijking:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \gamma \frac{m_z m_p}{r^2} \hat{r}$$



De oplossingen van voorgaande vergelijking zijn stuk voor stuk in verband te brengen met de Kepleriaanse oplossingen waarvoor  $s > \frac{\alpha\omega}{\beta r_0}$ , zoals geïllustreerd in onderstaande figuren.



Rond tijdstip  $t = 0$  doet de afstotende kracht zich gevoelen, maar na een tijdje beweegt het hemellichaam vrijwel ongehinderd verder, daar de kracht op grote afstand heel zwak is. Het hemellichaam beweegt uiteindelijk steeds verder van de zon af in een vrijwel rechte lijn (langs een asymptoot van de hyperbool) en met een vrijwel constante snelheid (hoe kleiner de snelheid  $v_0$ , des te dichter de uiteindelijke hoek nadert tot 0).

<sup>22</sup>In noot 21 is aangetoond dat voor alle waarden van de Newtoniaanse parameters (met uitzondering van  $v_0 = 0$ ) waarden voor de Kepleriaanse parameters gevonden kunnen worden, zodanig dat de Kepleriaanse oplossing samenvalt met de Newtoniaanse oplossing:

$$\frac{\alpha\omega}{\ell} = r_0 v_0$$

$$\frac{\beta s}{\ell} = v_0 \left(1 - \frac{\gamma M}{r_0 v_0^2}\right) = v_0 \left(1 - \frac{\gamma(m_z + m_p)}{r_0 v_0^2}\right)$$

Beschouw nu het geval dat we met meerdere planeten te maken hebben, die we labelen met een superindex. Planeet  $i$  heeft dus bijvoorbeeld massa  $m_p^i$ , luiheid  $\ell^i$ , beginafstand  $r_0^i$ , etc. Als het er alleen maar om gaat Kepleriaanse waarden te vinden voor de niet-direct waarneembare grootheden  $\ell^i$  en  $s^i$  zodanig dat de Kepleriaanse oplossingen samenvallen met de Newtoniaanse oplossingen, dan is dat op zich niet moeilijk:

$$\ell^i = \frac{\alpha\omega}{r_0^i v_0^i}$$

$$s^i = \frac{\alpha\omega}{\beta r_0^i} \left\{1 - \frac{\gamma(m_z + m_p^i)}{r_0^i (v_0^i)^2}\right\}$$

Als er echter ook nog andere eisen meespelen, dan blijkt het lastig te zijn om de parameters zodanig te kiezen dat de waargenomen bewegingen van *alle* planeten in overeenstemming zijn met de theorie. Neem bijvoorbeeld Keplers idee dat *luiheid* een maat is voor *hoeveelheid materie*. Dit is precies het idee dat Newton had bij *massa*. Als we echter aannemen dat de luiheid  $\ell^i$  van planeet  $i$  gelijk is aan de massa  $m_p^i$  van planeet  $i$ , dan volgt dat moet gelden:

$$\alpha\omega = \ell^i r_0^i v_0^i = m_p^i r_0^i v_0^i = \left|\vec{L}^i\right|$$

De impulsmomenten van alle planeten zouden dan dus even groot moeten zijn.

<sup>23</sup>Ik heb een jaar of tien geleden een mechanicacursus voor de bovenbouw van het VWO ontwikkeld (Klaassen, 2007), waarin de suggesties worden uitgewerkt.

<sup>24</sup>Er zijn in het verleden vele pogingen gedaan om op *logische* gronden de juistheid te beargumenteren van een of ander traagheidsbeginsel, maar naar mijn indruk tevergeefs. Zo hebben Euler en D’Alembert beargumenteerd, met een beroep op het beginsel van toereikende grond, dat het enige mogelijke traagheidsbeginsel dat van Newton is. Euler argumenteert als volgt:

Da wir dies als Grundsatz angenommen haben, so bedarf es keines Beweises, indessen kann man ohne Schwierigkeit einen Grund dafür anführen. Zuerst wird der Körper in der Richtung keine Aenderung erleiden, da kein Grund vorhanden sein kann, warum er eher nach der einen, als nach der andern Seite hin von ihr abweichen sollte; er wird also eben so gewiss dieselbe Richtung beibehalten, wie ein ruhender Körper in Ruhe verharret. Was aber ferner die Geschwindigkeit anbelangt, so würde sie, wenn sie nicht stets dieselbe bliebe, entweder zu- oder abnehmen müssen und keines von beiden kann man ohne Absurdität behaupten. (Euler, 1853, §86)

Volgens Euler kan een voorwerp op zichzelf niet van snelheid veranderen, “since if it could there would be no ‘reason’ for the asymmetries that would thus be produced” (Nagel, 1979, pagina 177). De redenering is echter niet overtuigend voor iemand die niet al overtuigd is. Met eenzelfde type redenering, immers, zou Kepler kunnen beargumenteren dat een voorwerp op zichzelf niet in beweging kan zijn, daar er geen reden voorhanden is waarom het eerder in deze dan in die richting zou zijn gaan bewegen. Het probleem met deze redeneringen, opgevat als *a priori* argumenten, is dat een beweging op vele manieren gekarakteriseerd kan worden—in termen van plaats, snelheid, versnelling, verandering van versnelling, krommingsgraad, etc.—en dat deze verschillende manieren allemaal hun eigen symmetrieën en asymmetrieën introduceren. Over de vraag welke van deze symmetrieën de *dynamisch relevante* bewegingskenmerken zijn, geven puur logische redeneringen geen uitsluitsel. “On purely a priori grounds these alternatives have equal merit, and none of them is logically self-contradictory” (Nagel, 1979, pagina 177).

De afwezigheid van logische gronden houdt niet in dat een traagheidsbeginsel naar believen gekozen kan worden, of dat er geen *andere* gronden zijn om het ene beginsel boven het andere te verkiezen. Het is zeker geen vrijblijvende aangelegenheid om een of andere aanname te maken over de bewegingstoestand waarin een voorwerp verkeert wanneer er geen krachten op werken, zoals *rust* in het geval van Kepler en *met dezelfde snelheid rechtdoor bewegen* in het geval van Newton. Immers, de keuze die iemand maakt voor de krachtvrije bewegingstoestand impliceert ook wat voor die persoon geldt als een bewegingsverandering, en daarmee ook wat voor die persoon verklaard moet worden in termen van krachten. Zo moet Kepler iedere afwijking van rust, dat wil zeggen *iedere beweging* die een voorwerp ondergaat, kunnen verklaren in termen van een kracht die op dat voorwerp werkt. Newton, daarentegen, hoeft ‘alleen maar’ iedere afwijking van een eenparige rechtlijnige beweging, dat wil zeggen *iedere versnelling* die een voorwerp ondergaat, te kunnen verklaren in termen van een kracht die op dat voorwerp werkt.

Welnu, ook al kan een bepaalde keuze voor de krachtvrije bewegingstoestand ons motiveren om krachten te gaan zoeken waarmee we afwijkingen van die bewegingstoestand kunnen verklaren, dat op zichzelf biedt nog geen garantie dat we die

krachten ook zullen vinden. Krachten moeten niet alleen in verbinding gebracht worden met hun *effecten* (afwijkingen van de veronderstelde bewegingstoestand), maar ook met hun *bronnen*. Krachten moeten ergens vandaan komen. Dit laatste legt een extra eis op. We moeten krachten ook op een systematische manier in verbinding kunnen brengen met voorwerpen waar die krachten door uitgeoefend worden, met relevante eigenschappen van die voorwerpen, en met de constellatie waarin die voorwerpen zich bevinden. We moeten, met andere woorden, krachtwetten op kunnen stellen die de werkende krachten specificeren als een functie van de totale configuratie onder beschouwing (Jammer, 1999, pagina 244).

Kortom, “[t]heories of interaction and the notion of free—or inertial, or geodesic, or ‘naturally moving’—particle are intimately connected” (Friedman, 1983, pagina 121). Een traagheidsbeginsel kan derhalve niet naar believen gepostuleerd worden, omdat krachten niet naar believen gepostuleerd kunnen worden. Door te kiezen voor een bepaalde krachtvrije bewegingstoestand, laden we tegelijkertijd de taak op ons een plausibele interactietheorie op te stellen waardoor afwijkingen van die bewegingstoestand adequaat verklaard worden. De mate van succes die we hebben in het opstellen van zo’n theorie, is mede bepalend voor de status en de waarde van onze keuze voor die bepaalde krachtvrije bewegingstoestand. Het is dan ook in dit licht dat in §6 de merites van Kepler en Newton zijn vergeleken. In welke mate zijn ze in staat geweest een empirisch adequate interactietheorie op te stellen ter verklaring van de planeetbeweging, en in hoeverre voldoen hun respectieve theorieën verder nog aan desiderata als plausibiliteit, coherentie en generaliseerbaarheid?

## Referenties

- Assis, A. K. T. (1999). *Relational mechanics*. Montreal: Apeiron.
- Barbour, J. (2000). *The end of time: The next revolution in our understanding of the universe*. London: Phoenix.
- Barbour, J. (2001). *The discovery of mechanics: A study from a machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*. Oxford: Oxford University Press. (Originally published as volume 1 of *Absolute or Relative Motion?*, Cambridge University Press, 1989.)
- Barbour, J. & Bertotti, B. (1982). Mach’s principle and the structure of dynamical theories. *Proceedings of the Royal Society of London, A382*, 295–306.
- Cellarius, A. (1660). *Atlas cælestis seu harmonia macrocosmica*. Amsterdam: Johannes Janssonius.
- Chandrasekhar, S. (1995). *Newton’s Principia for the common reader*. Oxford: Oxford University Press.
- Earman, J. (1989). *World enough and space-time: Absolute versus relational theories of space and time*. Cambridge: MIT Press.
- Emmett, K., Klaassen, K. & Eijkelhof, H. (2009). Introducing mechanics II: Towards a justified choice between alternative theories of motion. *Physics Education*, 44, 492–498.
- Euler, L. (1853). *Leonhard Euler’s Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper*. Greifswald: C. A. Koch’s Verlagshandlung. (German translation of *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, first published in 1765. With notes and clarifications by J. Ph. Wolfors.)

- Friedman, M. (1983). *Foundations of space-time theories: Relativistic physics and philosophy of science*. Princeton: Princeton University Press.
- Galilei, G. (1957). *Discoveries and opinions of Galileo*. New York: Anchor Books. (The book contains (partial) translations of four works by Galilei: The Starry Messenger (1610), Letters on Sunspots (1613), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and The Assayer (1623). Translated with an Introduction and Notes by Stillman Drake.)
- Jammer, M. (1999). *Concepts of force: A study in the foundations of dynamics*. Mineola: Dover Publications. (An unabridged republication of the work originally published in 1957 by Harvard University Press, Cambridge.)
- Kepler, J. (1995). *Epitome of copernican astronomy & Harmonies of the world*. Amherst: Prometheus Books. (English translation of books 4 and 5 of *Epitome Astronomiæ Copernicanæ*, first published in 1620 and 1621, respectively, and of book 5 of *Harmonices Mundi*, first published in 1619.)
- Kepler, J. (2004). *Selections from Kepler's Astronomia Nova*. Santa Fe: Green Lion Press. (Selected, translated, and annotated by William H. Donahue.)
- Klaassen, K. (2007). *Mechanica: Een inleidende cursus voor 4 vwo*. Utrecht: Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen. (Dit is de derde versie van het lesmateriaal. De eerste versie dateert van 2005.)
- Klaassen, K., Westra, A., Emmett, K., Eijkelhof, H. & Lijnse, P. (2008). Introducing mechanics by tapping core causal knowledge. *Physics Education*, 43, 433–439.
- Nagel, E. (1979). *The structure of science: Problems in the logic of scientific explanation*. Indianapolis: Hackett Publishing Company.
- Newton, I. (1999). *The Principia: Mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley: University of California Press. (New English translation, based on the third (1726) edition of *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. The first edition was published in 1687. Preceded by ‘A Guide to Newton’s *Principia*’ by I. Bernard Cohen.)
- Ptolemy, C. (1998). *Ptolemy's Almagest*. Princeton: Princeton. (Ptolemy’s epoch-making book is generally called by its Arabic name, the *Almagest*, meaning literally “The Greatest”. It is written in Greek in Hellenistic Egypt around the year 150. Translated and annotated by G. J. Toomer.)
- Rosen, E. (1966). Kepler’s harmonics and his concept of inertia. *American Journal of Physics*, 610–613.
- Stephenson, B. (1994). *Kepler's physical astronomy*. Princeton: Princeton University Press.
- Wooning, J., Van Dijk, V., Emmett, K. & Klaassen, K. (2008). *Mechanica: Een inleidende cursus in VWO 4*. Verschenen op de DVD-ROM van de Woudschoten conferentie van 2007, met als thema: Wat Natuurkundigen Doen. Uitgegeven door de Werkgroep Natuurkunde Didactiek. (Verslag van Werkgroep 30.)

# Mechanica. Een inleidende cursus in VWO 4

Werkgroep 30

*J. Wooning, V. van Dijk, K. Emmett & K. Klaassen*

College de Heemlanden, Houten, Openbaar Zeister Lyceum & FIsme, Universiteit Utrecht

## Inleiding

In een samenwerkingsverband tussen twee scholen (College de Heemlanden en Openbaar Zeister Lyceum) en het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, hebben we een cursus ontwikkeld die een inleiding op de mechanica beoogt te geven. De aanleiding voor onze Inleidende Cursus was tweeledig. Enerzijds wilden we het belang van de mechanica beter tot zijn recht laten komen, anderzijds wilden we begripsmatige winst boeken.

Tijdens de werkgroep hebben we enkele karakteristieke onderdelen van de Inleidende Cursus besproken, evenals de plaats van deze cursus in de rest van het mechanica-onderwijs. Ook zijn we ingegaan op praktijkervaringen. Al deze punten, aangevuld met opmerkingen naar aanleiding van vragen van deelnemers, komen in dit verslag aan bod.

## Algemeen didactische opzet

Het hoofddoel van de Inleidende Cursus is:

- De ontwikkeling van een theorie waarmee bewegingen heel precies verklaard en voorspeld kunnen worden.

Bij het ontwerpen van de cursus hebben we gebruik gemaakt van de volgende didactische uitgangspunten:

- Leerlingen zo concreet mogelijk interesseren voor het nogal abstracte hoofddoel.
- Met gebruikmaking van hun bestaande intuïties, leerlingen een weg naar dit doel laten afleggen.

Indien we hierin slagen, kunnen leerlingen tijdens de cursus steeds inhoudelijk aangeven wat ze gaan doen en waarom, dus hoe datgene wat ze gaan doen belooft bij te dragen aan hetgeen ze willen bereiken.

Al doende is het de bedoeling dat leerlingen hun intuïties verdiepen en inzicht bereiken in wat bewegingsverklaring inhoudt. Tevens hopen we leerlingen aan de hand van deze concrete casus tot dieper inzicht te brengen in het ontwikkelen en testen van theorieën.



Figuur 1. Omslag van het lesmateriaal.

Ter illustratie van de uitgangspunten, bespreken we vier karakteristieke passages uit de cursus:

- Motiveren voor bewegingsverklaring.
- Komen tot een basisidee van bewegingsverklaring, op basis van bestaande intuïties.
- Preciseren van het basisidee tot een constructiemethode.
- Evalueren van twee alternatieve theorieën ter verklaring van planeetbeweging.

### Motiveren voor bewegingsverklaring

De cursus begint met leerlingen zo concreet mogelijk te interesseren voor het hoofddoel: de ontwikkeling van een theorie waarmee je bewegingen heel precies kunt verklaren en voorspellen. Daartoe bieden we enkele geschikt gekozen voorbeelden aan van het gebruik van mechanica:

- In de voorbeelden komt voor leerlingen duidelijk naar voren wat met mechanica meer kan dan ze nu zelf al kunnen.
- De voorbeelden spreken leerlingen vooral aan door de toevoeging die mechanica mogelijk maakt.



Figuur 2. Een ontredderde Fignon, na zijn verlies.

Eén van de voorbeelden betreft de afsluitende tijdrit van de Tour van 1989. Vóór de tijdrit had de leider van het algemeen klassement, Laurent Fignon, 50 s voorsprong op zijn naaste belager, Greg Lemond. Lemond reed de tijdrit echter 58 s sneller dan Fignon, en won daarmee met 8 s voorsprong – het kleinste verschil in de geschiedenis van de Tour. Wat Fignons verlies des te pijnlijker maakt, is dat het onnodig was. Dit is wat een paar natuurkundigen concludeerden door de tijdrit eens preciezer te analyseren met gebruikmaking van mechanica. Als Fignon, net als Lemond, een triathlonstuur had gebruikt en een helm had gedragen, zou hij minstens 15 s sneller hebben gereden.

De bedoeling van dit voorbeeld mag nu duidelijk zijn. Leerlingen zien vast al wel voor zich dat Fignon met triathlonstuur en helm sneller zou zijn geweest, maar met mechanica valt het verschil in snelheid blijkbaar precies te bepalen. En het is juist dit aspect dat het voorbeeld zijn

pointe geeft – het verschil tussen winst en verlies van de Tour.

Met enkele andere aansprekende voorbeelden proberen we leerlingen op een soortgelijke manier te interesseren voor de ontwikkeling van een theorie om bewegingen heel precies te kunnen verklaren en voorspellen.

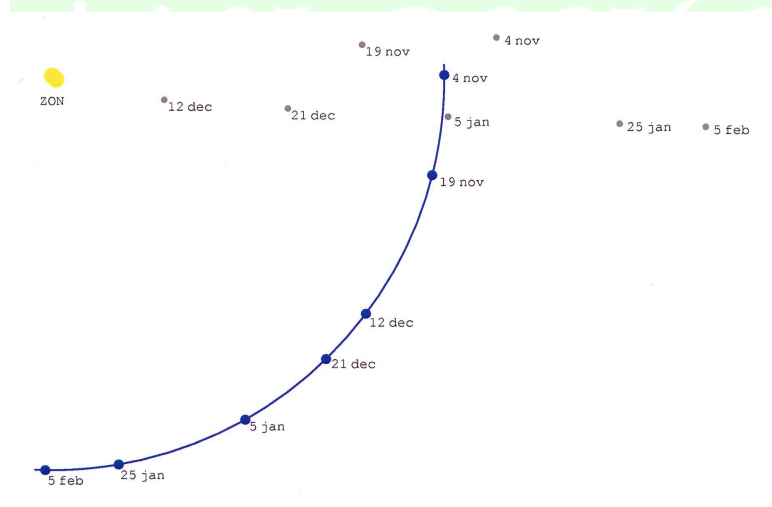
### Een basisidee van bewegingsverklaring

Nadat leerlingen aldus een doel van de cursus voor ogen hebben, betrekken we ze bij een manier om dat doel te bereiken. Om erachter te komen wat bewegingsverklaring nou eigenlijk inhoudt – hoe dat in zijn werk gaat – beginnen we met het boven tafel krijgen van de ideeën waarvan leerlingen zelf al gebruik maken, wanneer ze uitleggen waarom iets beweegt zoals het beweegt. We doen dat aan de hand van een probleem dat Newton aan het eind van de *Principia* behandelt.

#### *Een intrigerend probleem*

Eind 1680 – begin 1681 was er een aantal nachten een komeet aan de hemel te zien. De komeet wordt de *Grote Komeet van 1680* genoemd, of ook wel *komeet Kirch* – naar de Duitse sterrenkundige die de komeet voor het eerst waargenomen heeft. In figuur 3 staat heliocentrisch weergegeven waar de komeet zich bevond op de dagen dat hij is waargenomen (grijze stippen). Om een idee van de schaal te geven is ook een deel van de baan van de Aarde

weergegeven. De blauwe stippen stellen de posities van de Aarde voor op de dagen dat de waarnemingen zijn gedaan.



Figuur 3. De plekken waar komeet Kirch (grijze stippen) en de Aarde (blauwe stippen) zich op enkele data bevonden ten opzichte van de Zon (gele vlek).

De figuur roept meteen allerlei vragen op. Waar bevond de komeet zich op de dagen dat hij niet is waargenomen? Kun je ook de baan van de komeet intekenen, net zoals die van de Aarde? En vooral, wat is er eind november – begin december 1680 precies gebeurd? We leggen leerlingen de volgende vragen voor:

- Hoe ziet de baan eruit waarlangs volgens jou de komeet bewogen heeft?
- Is de komeet zomaar uit zichzelf omgekeerd? Of moet daar een oorzaak voor zijn geweest? Zo ja, welke oorzaak?
- Is de komeet tussen 4 en 19 november beïnvloed door de zon of iets anders? Zo nee, hoe komt het dat de komeet toen wel bewogen heeft?
- Idem voor het stuk tussen 21 december en 5 januari.
- Leg uit wat de komeet na 5 februari gedaan zal hebben en waarom.

Bij al deze vragen geven we aan dat het niet erg is als leerlingen niet zeker zijn van hun antwoorden. Waar het immers vooral om gaat is de aanpak. Hoe ga je te werk wanneer je de beweging van de komeet probeert te begrijpen? Welke ideeën zitten daarachter?

#### *Hoe pakken leerlingen het probleem zoal aan?*

Zoals door ons beoogd, leveren deze vragen een rijke variatie aan antwoorden op. Er zijn leerlingen die de baan achter de Zon langs tekenen, maar typisch ook minstens evenveel leerlingen die de baan voorlangs tekenen. De meeste leerlingen antwoorden dat de komeet niet zomaar uit zichzelf omgekeerd zal zijn en identificeren de Zon als oorzaak. Over de aard van de invloed van de Zon lopen de meningen wel weer uiteen. Sommige leerlingen beweren dat de invloed van de Zon steeds aantrekkend is geweest. Anderen noemen op het stuk naar de Zon toe een aantrekkende en op het stuk van de Zon af een afstotende invloed. Weer andere leerlingen beweren dat de komeet aan de Zon is afgeketst. Daarnaast wordt soms nog gesproken over een zonnewind. Verder zijn er leerlingen die het behalve over een invloed van de Zon ook hebben over een invloed van de Aarde. Die zorgt er dan bijvoorbeeld voor dat de komeet tussen 4 en 19 november iets uit zijn baan getrokken werd, of dat de komeet voor de Zon langs getrokken werd. Sommige leerlingen denken dat de komeet nauwelijks nog beïnvloed werd op het stuk tussen 21 december en 5 januari, en dat de komeet toen toch bewoog omdat hij nou eenmaal al een snelheid had. Anderen vinden dat de Zon de komeet toen toch op een of andere manier weggeduwd moet hebben. Sommige leerlingen trekken de baan vanaf

5 februari door, ook al werkt er volgens hen dan geen invloed meer. Anderen sluiten de baan, omdat er toch nog steeds aan de komeet getrokken wordt.

#### *Op weg naar een systematische aanpak*

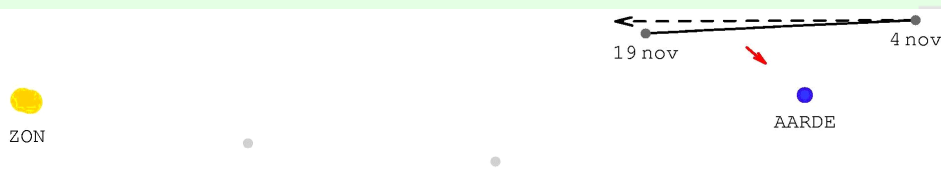
In een klassikale bespreking onder leiding van de docent komt vervolgens naar voren dat er, ondanks alle verschillen, toch ook gemeenschappelijke elementen te herkennen zijn in de manier waarop leerlingen een bewegingsverklaring aanpakken.

Eén gemeenschappelijk element is dat ze allemaal ideeën hebben over potentiële invloedsbronnen en eigenschappen daarvan. Ook al verschillen ze onderling behoorlijk over de inhoud van die ideeën, allemaal maken ze er gebruik van bij het geven van een verklaring.

Een ander gemeenschappelijk element is dat ze allemaal in het achterhoofd een idee hebben over hoe de komeet uit zichzelf zou hebben bewogen. Zo'n idee speelt, hoe impliciet ook, een rol bij wat er verklaard moet worden en op welke manier. Het duidelijkst komt dat tot uiting als het gaat om de omkering van de komeet. De gedachte dat die omkering veroorzaakt is, wat bijna alle leerlingen onderschrijven, stoelt immers op twee ideeën. Enerzijds een idee betreffende potentiële invloedsbronnen, waardoor aannemelijk wordt dat bijvoorbeeld de Zon het gedaan *kan* hebben. Maar anderzijds speelt ook het idee mee dat een komeet uit zichzelf niet zomaar zal omkeren, waaruit volgt dat er iets *moet* zijn geweest dat dit veroorzaakt heeft.

Het subtiële samenspel tussen de twee elementen komt ook nog op andere manieren naar voren, zoals bij de verschillende verklaringen die gegeven zijn voor de beweging tussen 21 december en 5 januari. Sommige leerlingen denken dat er toen nauwelijks nog een invloed op de komeet werkte, anderen dat de Zon toen nog een afstotende invloed uitgeoefend moet hebben. Volgens de eerste groep was er geen invloed nodig, omdat de komeet uit zichzelf gewoon de snelheid behield die hij al had. Volgens de tweede groep kan het niet anders dan dat er een invloed gewerkt moet hebben, vermoedelijk met in het achterhoofd het idee dat de komeet uit zichzelf gewoon stil zou zijn blijven staan. Ondanks de verschillen, zijn de twee groepen het over één ding in ieder geval eens. We hoeven alleen maar een invloed aan te wijzen wanneer de komeet anders beweegt dan hoe we denken dat hij uit zichzelf al zou bewegen. Volgens de tweede groep leerlingen beweegt de komeet anders dan hij uit zichzelf zou doen (want uit zichzelf zou hij stilstaan), dus moeten zij op zoek gaan naar een invloed. Volgens de eerste groep leerlingen werkt er geen invloed, maar dat klopt dan ook met hoe de komeet beweegt (want uit zichzelf behoudt hij zijn snelheid al).

Op deze manier komt geleidelijk een systematische aanpak van bewegingsverklaring naar voren. De beweging van de komeet is uit te leggen als een combinatie van hoe de komeet uit zichzelf al verder zou hebben bewogen en een afwijking daarvan ten gevolge van een invloed. Een aanzet daartoe is al te vinden bij de leerlingen die denken dat de komeet tussen 4 en 19 november iets uit zijn baan getrokken is door de Aarde – een gedachte die in figuur 4 grafisch is weergegeven.



Figuur 4. Uit zichzelf zou de komeet langs de streepjespijl bewogen hebben. Door een aantrekkende invloed van de Aarde is hij een beetje uit die baan getrokken. De rode pijl stelt de invloed voor.

De twee besproken gemeenschappelijke elementen, en de subtiële combinatie daarvan, kunnen als volgt worden samengevat.

#### **Basisidee van bewegingsverklaring:**

Een invloed veroorzaakt een afwijking van hoe iets uit zichzelf al zou bewegen.



### *Vooruitblik*

Met de formulering van dit basisidee van bewegingsverklaring is het hoofddoel van de cursus natuurlijk nog niet bereikt, maar het geeft wel richting aan wat er gedaan moet worden om een theorie te ontwikkelen waarmee je beweging kunt verklaren. Op de volgende vragen moeten antwoorden gevonden worden:

- Wat voor invloeden werken op de komeet?
- Hoe zou de komeet uit zichzelf al verder bewegen?

Op dit moment in de cursus zijn leerlingen uiteraard nog onzeker over hun antwoorden, ook al hebben ze wel hun vermoedens. Bovendien zijn ze het lang niet allemaal met elkaar eens, zonder dat nou meteen duidelijk is wie gelijk heeft.

Hetzelfde gold voor de natuurwetenschappers die aan de wieg van bewegingsverklaring hebben gestaan. Zo hadden Kepler en Newton onderling heel verschillende aannames over zowel de invloeden als de beweging uit zichzelf. In de rest van de cursus gaan leerlingen in zekere zin de gedachten volgen van Kepler en Newton. Daarbij komt vanzelf de vraag naar voren wie van de twee gelijk had: wiens aannames zijn beter, en hoe kom je daarachter?

### *Waarom Kepler en Newton?*

We behandelen zowel Kepler als Newton om verschillende redenen. Naar onze indruk begrijp je een theorie des te beter, wanneer je ook begrijpt waarom deze beter is dan een andere. Bovendien staat Keplers theorie dicht bij de eigen ideeën van in ieder geval sommige leerlingen, ook al weten ze dan van horen zeggen (bijvoorbeeld bij ANW) dat Newtons theorie de juiste is. Verder vinden we het belangrijk om de gronden voor theoriekeuze aan de orde te stellen – niet zozeer in abstracto, maar juist gekoppeld aan concrete alternatieve theorieën. Tenslotte lijkt het ons voor vwo-leerlingen belangrijk en interessant om iets te weten over de ontstaansgeschiedenis van een belangrijke wetenschappelijke theorie.

### **Een nauwkeurige constructiemethode**

Voordat leerlingen gaan leren over de aannames van Kepler en Newton over de invloeden die werken op hemellichamen, wordt eerst het basisidee nog uitgewerkt tot een methode om bewegingen nauwkeurig te kunnen construeren. Die methode komt neer op:

- tijdstapje-voor-tijdstapje toepassing van het basisidee;
- verkleining van het tijdstapje om tot nauwkeurige resultaten te komen.

Om het basisidee te kunnen toepassen, moet behalve een aanname over de invloeden ook een aanname gemaakt worden over de beweging uit zichzelf. Wat deze laatste aanname betreft onderscheiden we twee gevallen:

- *stilstaan*: dit is Keplers aanname;
- *met dezelfde snelheid rechtdoor bewegen*: dit is Newtons aanname.

Beide aannames komen, zij het impliciet, meestal ook voor bij leerlingen.

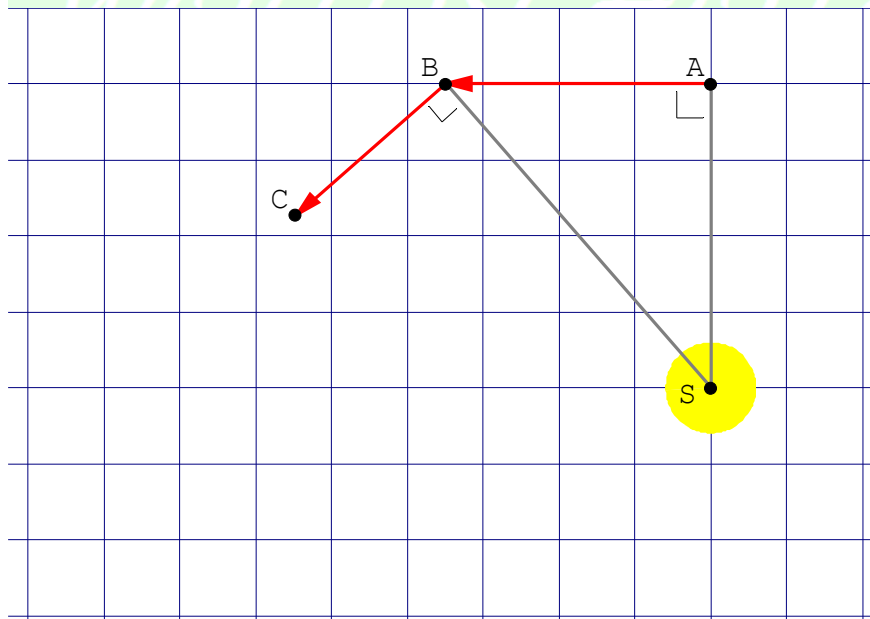
### *Nauwkeurige constructies maken met als aanname voor de beweging uit zichzelf: stilstaan*

Met deze aanname voor de beweging uit zichzelf is de constructiemethode vrij eenvoudig. Een voorwerp verplaatst zich dan immers alleen maar als er een invloed op werkt. We laten leerlingen bij wijze van voorbeeld een constructie maken waarbij op een komeet een invloed werkt met de volgende eigenschappen:

- De invloed wordt uitgeoefend door de Zon.
- De invloed staat steeds dwars op de verbindinglijn tussen de komeet en de Zon.
- De invloed is kleiner, naarmate de komeet verder van de Zon af is.

De Zon zou bijvoorbeeld een dergelijke invloed kunnen uitoefenen, doordat ze om haar eigen as draait en al draaiend de komeet als het ware meesleurt.

Om het aanleren van de constructiemethode wat levendiger te maken, stellen we de vraag of met zo'n invloed verklaard kan worden dat de komeet omkeert, in combinatie natuurlijk met 'stilstaan' als aanname voor de beweging uit zichzelf.



Figuur 5. Begin van een constructie met een 'dwarse' invloed en met 'stilstaan' als aanname voor de beweging uit zichzelf.

Op een gegeven moment bevindt de komeet zich in positie A (zie figuur 5). Waar bevindt de komeet zich een dag later? Met stilstaan als aanname voor de beweging uit zichzelf, zou de komeet zonder invloed nog steeds in A zitten. Maar er is wel een invloed. Deze staat dwars op de verbindinglijn tussen de komeet en de Zon (dus loodrecht op de lijn SA). Door de invloed gaat de komeet in die richting bewegen (zie de rode pijl). Stel dat de grootte van de verplaatsing in één dag (op schaal) wordt gegeven door de formule:

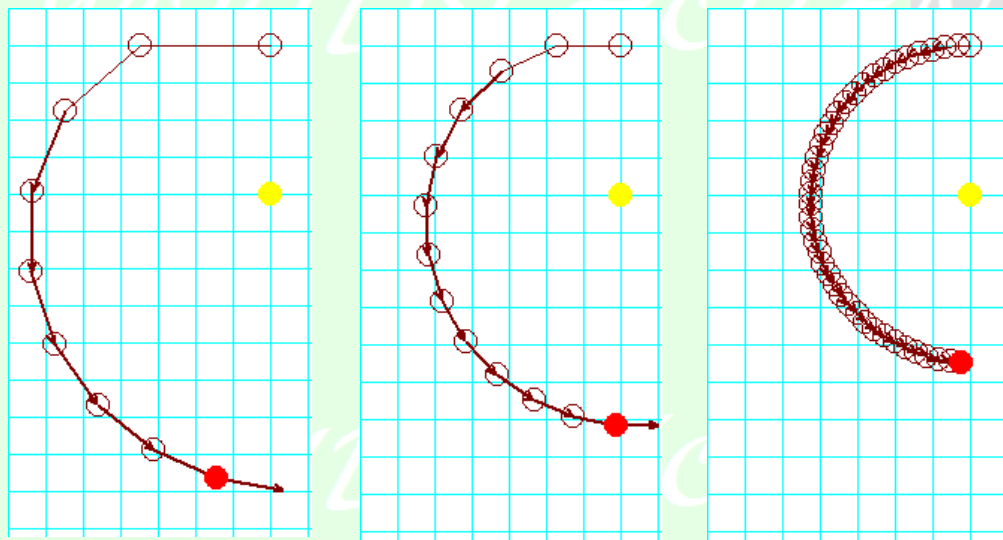
$$\text{verplaatsing in 1 dag} = \frac{14}{\text{afstand tot de Zon}}$$

Met gebruikmaking van deze formule volgt dat de komeet zich één dag later bevindt in positie B, aan het uiteinde van de rode pijl (de verplaatsing door de invloed).

Met een analoge redenering volgt dat de komeet zich weer een dag later in C bevindt. Leerlingen voeren vervolgens de constructie uit voor nog enkele tijdstappen. Zo zien ze dat met de gemaakte aannames inderdaad verklaard kan worden dat de komeet omkeert. Verder volgt uit deze aannames dat de komeet achter de Zon langs gaat, en dat de omkering ongeveer 8 dagen duurt.

Uiteraard volgt nog niet dat de aannames goed zijn, maar wel dat met de gemaakte aannames een beweging geconstrueerd kan worden. Of tenminste een ruwe benadering van de beweging, want het is duidelijk dat de baan van een komeet niet zo hoekig zal zijn als de baan ABC... Een betere benadering wordt verkregen door de constructie te herhalen met een kleinere tijdstap. Dit laten we leerlingen niet zelf doen, maar we laten ze werken met een computer. In onze cursus gebruiken we het freeware programma *Modellus*, vanwege de mooie animatiemogelijkheden. In figuur 6 staan enkele constructies die door de computer zijn gemaakt. De linkse stemt overeen met de constructie die leerlingen zelf ook gemaakt hebben. De andere constructies zijn gemaakt met een steeds kleinere tijdstap. Op deze manier wordt de construc-

tiemethode aangeleerd als een procedure die leerlingen in principe zelf ook stap-voor-stap kunnen volgen, maar waarvoor de computer tenslotte ingezet wordt om snel tot nauwkeurige resultaten te kunnen komen.



Figuur 6. Door steeds kleinere tijdstapjes te nemen, wordt de geconstrueerde beweging steeds nauwkeuriger.

*Nauwkeurige constructies maken met als aanname voor de beweging uit zichzelf: rechtdoor bewegen*

Met deze aanname voor de beweging uit zichzelf is de constructiemethode wat lastiger. Er moet nu immers ook rekening gehouden worden met een verplaatsing uit zichzelf. We gebruiken weer de context van de komeetomkering om het aanleren van de constructiemethode wat levendiger te maken. De vraag is nu dus of de aanname ‘rechtdoor bewegen’ voor de beweging uit zichzelf zodanig gecombineerd kan worden met een aanname over de invloed, dat verklaard wordt dat de komeet omkeert. We laten leerlingen een constructie maken waarbij op de komeet een invloed werkt met de volgende eigenschappen:

- De invloed wordt uitgeoefend door de Zon.
- De invloed is afstotend.
- De invloed is kleiner, naarmate de komeet verder van de Zon af is.

Sommige leerlingen hebben eerder een dergelijke invloed voorgesteld.

Op een gegeven moment bevindt de komeet zich in positie A (zie figuur 7). Waar bevindt de komeet zich een dag later? Wat daarvoor in ieder geval bekend moet zijn, is de afwijking die door de invloed veroorzaakt wordt. De invloed is afstotend, dus is de afwijking van de Zon af gericht (zie de rode pijl). Stel dat de grootte van de afwijking in één dag (op schaal) wordt gegeven door de formule:

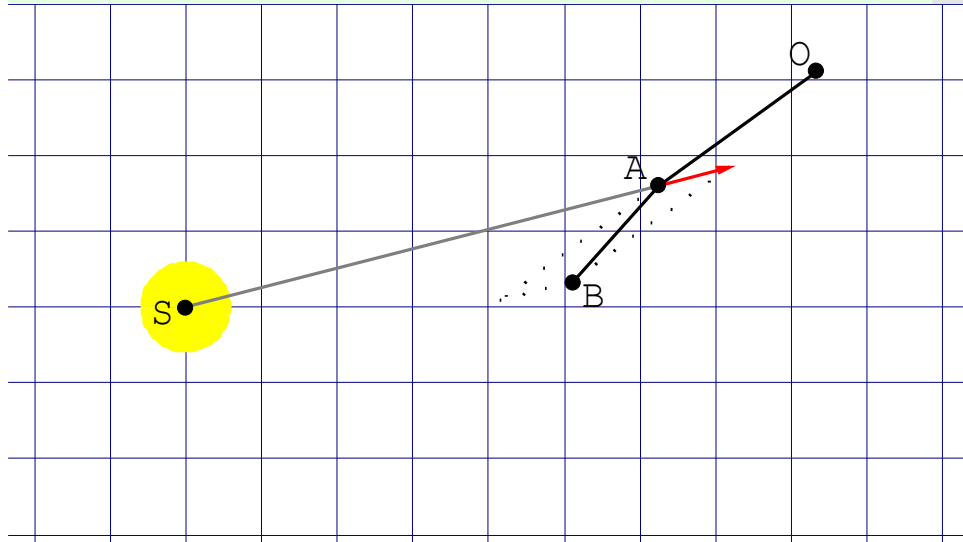
$$\text{grootte afwijking in 1 dag} = \frac{40}{(\text{afstand tot de Zon})^2}$$

De lengte van de rode pijl wordt met deze formule bepaald.

Er kan nu echter niet geconcludeerd worden dat de komeet zich één dag later aan het uiteinde van de rode pijl bevindt. Er moet immers ook nog rekening mee worden gehouden dat de komeet uit zichzelf al verder zou hebben bewogen: rechtdoor met de snelheid die hij al had. Om de verplaatsing uit zichzelf te kunnen bepalen, is het nodig om te weten waar de komeet een dag eerder was. Stel dat deze toen in O was. Dan zou de komeet vanaf A uit zichzelf in

het verlengde van OA bewogen hebben, over dezelfde afstand als OA, zoals weergegeven door de stippellijn.

Eén dag later bevindt de komeet zich niet aan het eind van de rode pijl, noch aan het eind van de stippellijn in het verlengde van OA, maar aan het eind van de vectoriële som van deze twee verplaatsingen: positie B.



Figuur 7. Begin van een constructie met een afstotende invloed en met 'rechtdoor bewegen' als aanname voor de beweging uit zichzelf.

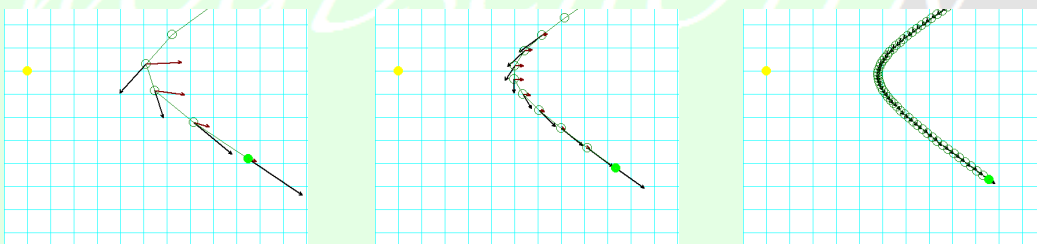
Op analoge manier is te bepalen waar de komeet zich nog een dag later bevindt. Leerlingen voeren deze constructie uit, en bepalen ook waar de komeet nog weer enkele dagen later terechtkomt. Zo zien ze dat ook met deze aannames verklaard kan worden dat de komeet omkeert. Verder volgt uit deze aannames dat de komeet voor de Zon langs gaat, en dat de omkering ongeveer 5 dagen duurt.

Uiteraard volgt ook nu niet dat de aannames goed zijn, maar weer wel dat met de gemaakte aannames een beweging geconstrueerd kan worden. Opnieuw wordt een betere benadering van de baan verkregen door de constructie te herhalen met een kleinere tijdstap, wat we leerlingen weer met een computer laten doen. We gaan niet in op de mathematische details van de constructiemethode. Zo staat in het lesmateriaal zonder afleiding dat bij aanpassing van de tijdstap geldt voor de invloedloze verplaatsing en voor de afwijking door de invloed:

$$(\text{verplaatsing uit zichzelf in tijdstap}) = (\text{snellheid}) \times (\text{tijdstap})$$

$$(\text{afwijking door invloed in tijdstap}) = (\text{invloed}) \times (\text{tijdstap})^2$$

In figuur 8 staan enkele constructies die door de computer zijn gemaakt, waarvan de linkse overeenstemt met de constructie die leerlingen zelf ook gemaakt hebben. De andere constructies zijn gemaakt met een steeds kleinere tijdstap.



Figuur 8. De geconstrueerde beweging wordt weer steeds nauwkeuriger door steeds kleinere tijdstapjes te nemen.

### Evaluatie van alternatieve theorieën

Leerlingen hebben nu een methode geleerd waarmee – gegeven een theorie, d.w.z. aannames over de invloeden en over de beweging uit zichzelf – de beweging ten gevolge van die theorie nauwkeurig bepaald kan worden. De vraag die nog rest is:

- Wat is de goede theorie?

Eén ding is leerlingen duidelijk: een goede theorie moet voorspellingen doen die overeenstemmen met de waarnemingen. Verder is het ze duidelijk dat de constructiemethode handig ingezet kan worden om de empirische adequaatheid van een theorie te testen:

- Bepaal met de constructiemethode de beweging volgens de theorie.
- Vergelijk die theoretisch geconstrueerde beweging met de waargenomen beweging.

In het tweede deel van onze Inleidende Cursus werken leerlingen dit plan uit.

Bij het aanleren van de constructiemethode hebben leerlingen in feite al twee theorieën leren kennen. Met beide valt weliswaar te verklaren dat een komeet omkeert, maar verder verschillen ze aanzienlijk in wat ze voorspellen. Volgens de ene theorie gaat de komeet achter de Zon langs en duurt de omkering ongeveer 8 dagen; volgens de andere gaat de komeet voorlangs en duurt de omkering ongeveer 5 dagen. En misschien zijn er nog andere theorieën te bedenken, bijvoorbeeld een theorie met een aantrekkende invloed waarbij de komeet achterlangs gaat. Bij gebrek aan data over de precieze beweging van komeet Kirch, valt niet uit te maken welke van deze theorieën het beste is.

Om een theorie *wel* te kunnen testen, moet deze toegepast worden op voorwerpen waarvan precies bekend is hoe ze bewegen. Daarom gaan we in de cursus over op planeten. Daarvan is namelijk precies bekend hoe ze bewegen, ook al in de tijd van Kepler en Newton. Leerlingen gaan dus de theorieën van Kepler en Newton over de planeetbeweging bestuderen en testen.

#### *Keplers theorie voor de planeten*

Omdat Keplers theorie velen onbekend zal zijn, gaan we daar nu wat uitgebreider op in – maar wel veel korter dan in het lesmateriaal. Keplers aanname voor de beweging uit zichzelf is: stilstaan. Verder werken er volgens Kepler twee soorten invloeden op een planeet:

- een draaikolk-invloed;
- een magnetische invloed.

De draaikolk-invloed is een gevolg van de rotatie van de Zon, waardoor de planeten als het ware meegesleurd worden. Deze invloed staat steeds loodrecht op de verbindinglijn tussen de planeet en de Zon. Voor de grootte ervan geldt:

$$\text{grootte draaikolk-invloed} = \frac{\text{rotatiesnelheid van de Zon}}{\text{afstand tot de Zon}}$$

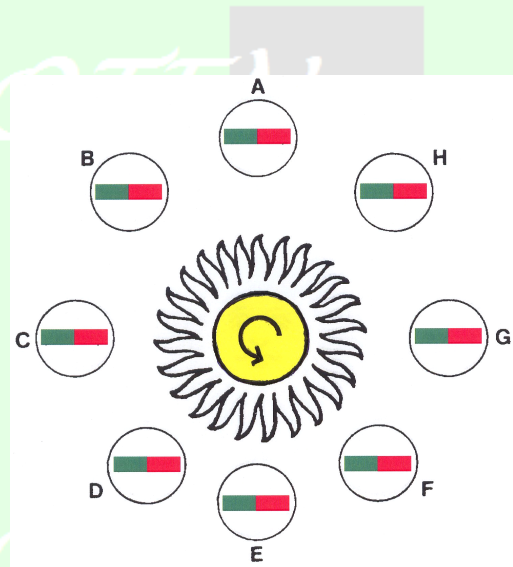
Als alleen de draaikolk-invloed werkte, zouden de planeten eenparige cirkelbewegingen uitvoeren. Bedenk namelijk dat het met ‘stilstaan’ als aanname voor de beweging uit zichzelf zo is dat de beweging altijd in de richting van de uitgeoefende invloed gaat.

Daar de planeten geen eenparige cirkelbeweging uitvoeren heeft Kepler nog een tweede invloed aangenomen: een soort magneetwerking. In een planeet bevinden zich volgens Kepler ‘magnetische draden’ (zie figuur 9). Hoe meer draden, des te sterker de magnetische invloed is. De noordpool van de draden (rood) wordt aangetrokken door de Zon; de zuidpool (groen) wordt afgestoten. De invloed is aantrekkend dan wel afstotend, en hangt af van hoeveel dichterbij de ene pool zich bij de Zon bevindt dan de andere. Preciezer geldt (maar deze formule komt niet in het lesmateriaal voor):

$$\text{magnetische invloed} = - (\text{aantal draden}) \times \sin \alpha$$

Hierbij is  $\alpha$  de hoek ASP, met A het aphelium, S het centrum van de Zon, en P de positie van de planeet. In positie C is de hoek bijvoorbeeld  $90^\circ$ .

Kwalitatief gaat Keplers redenering als volgt. Wanneer een planeet zich in positie A bevindt, zijn beide polen van de draden even ver van de Zon verwijderd. De aantrekking en de afstoting heffen elkaar dan op. In A ondergaat de planeet dus geen afwijking door de magnetische invloed. Natuurlijk is er nog wel de draaikolk-invloed, ten gevolge van het roteren van de Zon. Daardoor krijgt de planeet een afwijking in de richting van B. Wanneer de planeet in B is aangekomen, bevindt de noordpool van de draden zich iets dichterbij de Zon dan de zuidpool. De aantrekking is daarom in B wat sterker dan de afstoting. Dit maakt dat de planeet in B netto iets naar de Zon toe getrokken wordt. Dit aantrekkende effect is maximaal in positie C, waar het relatieve afstandverschil van beide polen tot de Zon het grootst is. Daarna neemt de aantrekking door de magnetische invloed af tot aan punt E. Van positie E tot positie A heeft de magnetische invloed juist een netto afstoting tot gevolg, tot aan positie G toenemend en daarna afnemend.



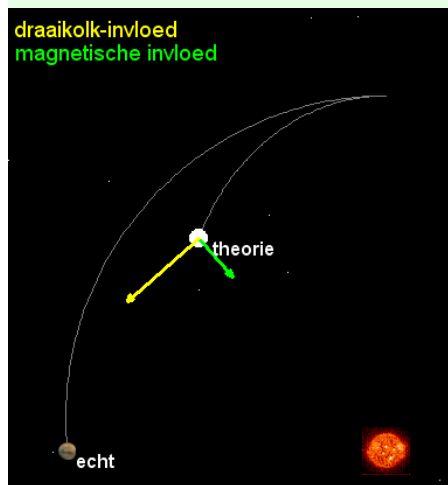
Figuur 9. Volgens Kepler werken op de planeet een draaikolk-invloed en een magnetische invloed.

Volgens deze kwalitatieve redenering is het resultaat van beide invloeden tezamen:

- De Zon staat niet langer in het middelpunt van de baan van de planeet. In E bevindt de planeet zich dichterbij de Zon dan in A.
- De planeet beweegt sneller naarmate deze zich dichterbij de Zon bevindt. De draaikolk-invloed is op kleinere afstand namelijk groter.

Dit is in overeenstemming met de feitelijke beweging van planeten.

#### Precieze test van Keplers theorie op de planeet Mars



Figuur 10. Keplers theorie toegepast op Mars.

Het blijkt inderdaad mogelijk om de modelplaneet te laten samenvallen met de waargenomen planeet, door geschikte keuze van de parameters. (Dit is geen toeval. Er kan analytisch aangetoond worden dat Keplers theorie Newtoniaanse oplossingen heeft.)

Leerlingen testen Keplers theorie op de planeet Mars. Een computermodel geeft zowel de waargenomen beweging weer als de volgens de theorie geconstrueerde beweging. Bij de theoretische beweging worden ook de twee invloeden weergegeven (zie figuur 10).

Leerlingen proberen de twee bewegingen te laten samenvallen door variatie van de relevante dynamische parameters in Keplers theorie:

- de rotatiesnelheid van de Zon;
- het aantal magnetische draden in Mars.

Vergeleken met de echte baan van Mars, trekt de witte modelplaneet in figuur 10 bijvoorbeeld teveel naar binnen. Ook loopt de modelplaneet achter. Dit suggereert dat het aantal draden verminderd moet worden, en de rotatiesnelheid verhoogd.

### Test van Newtons theorie op de planeet Mars

Aan Newtons theorie hoeven we hier minder aandacht te besteden. We volstaan met te vermelden dat we de gravitatiewet in vereenvoudigde vorm aanbieden, namelijk met de massa van de Zon als enige relevante dynamische parameter:

$$\text{grootte invloed} = \frac{\text{massa van de Zon}}{(\text{afstand tot de Zon})^2}$$

Uiteraard moet deze aanname voor de invloed gecombineerd worden met Newtons aanname voor de beweging uit zichzelf: met dezelfde snelheid rechtdoor bewegen. Anders zou het volgens de theorie zo zijn dat de planeet ten gevolge van de aantrekkende invloed te pletter slaat op de Zon.

Net als bij Keplers theorie, laten we leerlingen ook Newtons theorie testen op Mars. Ze gaan dus met behulp van een computermodel na of de met Newtons theorie geconstrueerde beweging kloppend te krijgen is met de waargenomen beweging. Uiteraard lukt dat voor een geschikte keuze van de massa van de Zon.

### Kiezen tussen Kepler en Newton

De stand van zaken is nu dus dat Keplers theorie en Newtons theorie beide de test voor Mars uitstekend hebben doorstaan. Maar uiteraard maakt één zwaluw nog geen zomer, dus ligt het voor de hand – ook voor leerlingen – om de theorieën ook eens te testen op andere hemellichamen. Leerlingen gaan dat vervolgens doen voor een andere planeet (de Aarde) en voor komeet Halley (waarvan de beweging wel uit en te na is waargenomen).

Het blijkt opnieuw dat voor beide theorieën de theoretisch geconstrueerde beweging kloppend is te krijgen met de waargenomen beweging, en voor elk van de hemellichamen is dat het geval. Toch doet zich een serieus probleem voor met Keplers theorie. Dit blijkt uit de volgende tabel, waarin weergegeven staat voor welke waarden van de parameters de theoretische en de waargenomen beweging samenvallen.

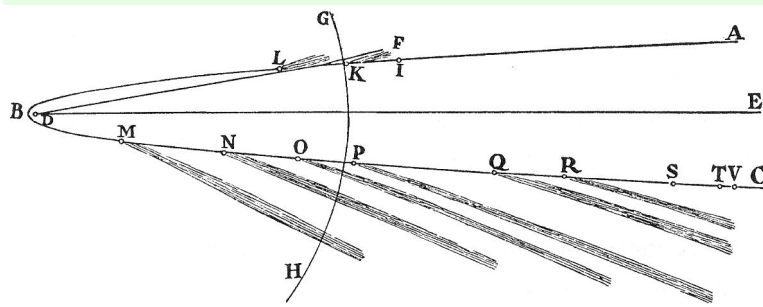
	Keplers theorie		Newtons theorie
	rotatiesnelheid	aantal draden	massa
Mars	14	268	1989
Aarde	12	20	1989
Halley	8	3733	1989

Het probleem met Keplers theorie is niet zozeer dat voor een ander hemellichaam een ander aantal draden gevonden wordt – dat zou kunnen. Maar het mag natuurlijk niet zo zijn – zoals ook leerlingen vinden – dat voor de rotatiesnelheid van de Zon *verschillende* waarden gevonden worden. Dat had in alle gevallen één en dezelfde waarde moeten zijn. Heel anders is de situatie bij Newtons theorie, waar voor elk van de gevallen dezelfde waarde van de massa van de Zon gevonden wordt.

Als het gaat om de keuze tussen theorieën, speelt dus nog meer mee dan de eis van empirische adequaatheid. Ook moet het zo zijn dat een theorie op dezelfde manier van toepassing is op dezelfde soort voorwerpen. Met name wat betreft deze eis van generaliseerbaarheid doet Newtons theorie het beter dan die van Kepler. Uiteraard toont dit nog niet aan dat Kepler definitief

verslagen is. Misschien is het mogelijk zijn theorie zo aan te passen dat de geconstateerde problemen verholpen worden. Maar dan komen – ook voor leerlingen – nog weer andere eisen naar voren die een rol spelen bij de keuze tussen theorieën. Bijvoorbeeld dat een theorie zo simpel mogelijk moet zijn en geen *ad hoc* aannames mag bevatten. De conclusie van de vergelijking is uiteindelijk dat Newtons theorie beter is dan die van Kepler.

Om de cirkel te sluiten, komen we uiteraard nog terug op komeet Kirch. Met behulp van een computermodel en met figuur 11 (afkomstig uit de *Principia*) laten we zien hoe de komeet volgens Newtons theorie bewogen heeft.



Figuur 11. De baan van komeet Kirch, zoals bepaald door Newton.

### Enkele indrukken uit de praktijk

De cursus draait ondertussen voor het derde achtereenvolgende jaar in de klas, en in de loop der tijd zijn de ergste kinderziektes eruit verdwenen. We volstaan hier nu met het geven van enkele algemene indrukken. Meer gedetailleerde bevindingen zullen gerapporteerd worden in het proefschrift van Katrina Emmett.

Over het algemeen werken leerlingen enthousiast met het materiaal. Wel vinden ze het vaak raar dat ze een foute theorie moeten leren. Er is dus wat extra docentbegeleiding vereist om leerlingen op het spoor te krijgen dat het niet alleen gaat om goed of fout, maar dat het *waarom* van het goed of fout minstens even belangrijk is. Sowieso vraagt de cursus om andere docentbegeleiding dan tegenwoordig gebruikelijk is in het studiehuis, vooral ook vanwege ons streven om leerlingen steeds bewust te maken van wat ze gaan doen en waarom.

Wat betreft de inhoudelijke opbrengst zijn de eerste indrukken dat leerlingen de mechanica leren waarderen als een krachtig theoretisch instrument waarmee ook veel nuttige dingen te doen zijn. Het feit dat ze herhaaldelijk zelf constructies maken speelt daarbij een belangrijke rol. Verder is het onze indruk dat leerlingen juist door Kepler te hebben bestudeerd tot een dieper begrip van Newton zijn gekomen. Daarbij moeten we wel aantekenen dat leerlingen soms moeite hebben om overzicht te houden over de verschillende theorieën, de relaties met hun eigen intuïties, en de soms subtiele gronden waarop gekozen wordt tussen theorieën. Dit onderstreept nog eens hoe vitaal een adequate ondersteuning door de docent is.

### Plaats van de cursus in het natuurkunde-programma

De Inleidende Cursus is, in overeenstemming met zijn naam, alleen nog maar een inleiding op de mechanica. Mede naar aanleiding van vragen van deelnemers aan de werkgroep, geven we nu aan welke mogelijkheden we zien om de cursus productief te maken in de rest van het natuurkunde-programma, in het bijzonder de rest van het mechanica-onderwijs.



### Overgang naar aardse bewegingen

De Inleidende Cursus sluit af met een overgang naar aardse bewegingen. Het is duidelijk dat als het gaat om bijvoorbeeld de beweging van een voetbal tijdens een voetbalwedstrijd of van een remmende auto, dat dan andere aannames gemaakt moeten worden over invloeden dan bij de beweging van hemellichamen. Welke precies, hangt van de situatie af. Anders is het met de aanname voor de beweging uit zichzelf. Kepler en Newton vonden allebei dat hun eigen aanname op *alle* voorwerpen van toepassing moet zijn, en niet alleen op hemellichamen. We delen mee dat, net zoals bij hemellichamen, het ook in andere gevallen steeds zo blijkt te zijn dat Newtons aanname het beter doet, en dat we daarom vanaf nu steeds met Newtons aanname werken.

Bij de overgang naar de aardse mechanica richten we de aandacht van leerlingen ook meteen op aspecten die de toepassing van Newtons aanpak op aardse bewegingen speciaal, en ook lastig, maken. In het bijzonder dat er bijna altijd meerdere krachten tegelijkertijd werken, en de speciale rol van wrijving. Klopt het bijvoorbeeld wel dat ook voor aardse bewegingen de beweging uit zichzelf gegeven wordt door: recht door met dezelfde snelheid? Om een kinderwagen met dezelfde snelheid te laten bewegen, moet je blijven duwen, anders komt de kinderwagen tot stilstand. Ook een bal die je weggroet komt uiteindelijk tot stilstand en hetzelfde geldt als je stopt met trappen op je fiets. Voor kinderwagens, ballen en fietsen lijkt het dus niet zo dat ze zonder invloed door blijven bewegen.

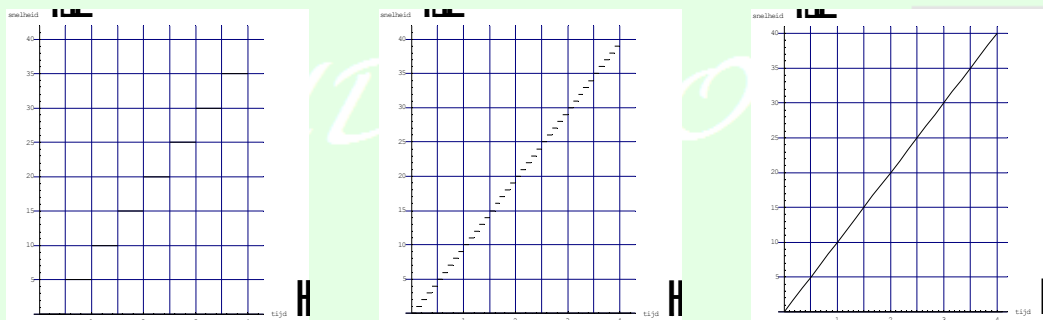


Figuur 12. Zonder te duwen komt de kinderwagen tot stilstand. Klopt Newtons aanname?

### Constante krachten langs de bewegingsrichting

We hebben aanvullend materiaal ontwikkeld, waarin Newtons aanpak toegepast wordt op een *constante kracht* die werkt *langs de bewegingsrichting*. De constantheid van de kracht maakt die toepassing simpeler, doordat de door een constante kracht in een tijdstap veroorzaakte afwijking dan steeds even groot is. De gerichtheid langs de beweging maakt de toepassing simpeler, doordat de combinatie van de verplaatsing uit zichzelf en de afwijking door de invloed dan een normale optelling is in plaats van een vectoriële.

Gegeven deze vereenvoudigingen kunnen leerlingen in belangrijke mate *zelf*, dus zonder gebruik van een computer, achterhalen dat een constante kracht tot een constante verandering van de snelheid leidt. Hieruit volgen dan de gebruikelijke formules voor de snelheid en de afgelegde weg als functie van de tijd.



Figuur 13. Door steeds kleinere tijdstapjes te nemen, is in te zien dat de snelheid-tijd grafiek een rechte lijn wordt.

### *Bespreekbaar maken van begripsproblemen*

We verwachten niet dat met de Inleidende Cursus alle mogelijke begripsproblemen voorkomen worden. Wel verwachten we op een aantal punten winst. Zo verwachten we dat leerlingen tot een beter begrip van Newtons eerste wet komen, en de rol die deze speelt in de mechanica. De eerste ervaringen wijzen uit dat dit inderdaad het geval is.

Verder verwachten we dat begripsproblemen, wanneer deze zich voordoen, in ieder geval beter bespreekbaar gemaakt kunnen worden. Neem bijvoorbeeld het idee dat op een bal die door een keeper is uitgetrapt behalve de zwaartekracht ook nog de 'kracht van de keeper' werkt. Wellicht ligt hier niet echt een probleem, en wil er alleen maar uitgedrukt zijn dat de keeper er uiteindelijk de oorzaak van is dat de bal door de lucht vliegt. Hoe dan ook, met een simpele constructie kan ingezien worden dat uitsluitend een naar beneden gerichte zwaartekracht verondersteld hoeft te worden om te verklaren dat de bal toch in een boog beweegt.

### *Kiezen tussen theorieën*

Naar onze indruk verdient de Inleidende Cursus navolging als het gaat om de meer filosofische en historische aspecten. Wij vinden het jammer dat deze aspecten tegenwoordig 'verbannen' worden naar ANW, en als gevolg daarvan te weinig inhoudelijk ingebed worden.

Een onderwerp dat om soortgelijke behandeling schreeuwt betreft de theorie van licht, met Huygens en Newton als belangrijke 'tegenstanders'. We hebben dit nog niet uitgewerkt tot voorbeeldmateriaal.

### **Is het de extra investering waard?**

De Inleidende Cursus beslaat ongeveer 11 lessen van 50 minuten, en betreft grotendeels niet-examenstof. Ongetwijfeld wordt bij de behandeling van de reguliere mechanica weer wat tijd teruggewonnen. Zo is het aanvullende materiaal dat we geschreven hebben bedoeld ter gedeeltelijke vervanging van de reguliere mechanica. Maar uiteindelijk is netto sprake van een behoorlijke tijdsinvestering.

Dit roept uiteraard meteen de vraag op of het de moeite waard is om die investering te doen. Met een discussie naar aanleiding van deze vraag hebben we onze werkgroep besloten. Uiteraard is er geen goed of fout antwoord op deze vraag. Wel hebben we veel docenten horen verzuchten dat ze zouden willen dat ze meer tijd en ruimte hadden om aandacht te besteden aan juist de aspecten die wij in onze Inleidende Cursus benadrukt hebben. In ieder geval willen wij de aanwezigen nogmaals bedanken voor hun belangstelling.

### **Contact**

Voor nadere informatie over het lesmateriaal met toebehoren kunt u contact opnemen met [c.w.j.m.klaassen@uu.nl](mailto:c.w.j.m.klaassen@uu.nl).

WOUDSCHOTEN

2007

# Introducing mechanics by tapping core causal knowledge\*

Kees Klaassen, Axel Westra, Katrina Emmett, Harrie Eijkelhof and Piet Lijnse

Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, The Netherlands

E-mail: [c.w.j.m.klaassen@uu.nl](mailto:c.w.j.m.klaassen@uu.nl)

## Abstract

This article concerns an outline of an introductory mechanics course. It is based on the argument that various uses of the concept of force (e.g. from Kepler, Newton and everyday life) share an explanatory strategy based on core causal knowledge. The strategy consists of (a) the idea that a force causes a deviation from how an object would move of its own accord (i.e. its *force-free* motion), and (b) an incentive to search, where the motion deviates from the assumed force-free motion, for recurring configurations with which such deviations can be correlated (*interaction theory*). Various assumptions can be made concerning both the force-free motion and the interaction theory, thus giving rise to a variety of specific explanations. Kepler's semi-implicit intuition about the force-free motion is *rest*, Newton's explicit assumption is *uniform rectilinear motion*, while in everyday explanations a diversity of pragmatic suggestions can be recognized. The idea is that the explanatory strategy, once made explicit by drawing on students' intuitive causal knowledge, can be made to function for students as an advance organizer, in the sense of a general scheme that they recognize but do not yet know how to detail for scientific purposes.

## Introduction

This article concerns a new approach for introducing mechanics at secondary level, based on the idea of providing students with a *content-based outlook* on what they are going to learn and why (Lijnse and Klaassen 2004):

- (a) *new knowledge* should fit in with *existing knowledge*,
- (b) students should be *motivated* to extend their knowledge in a given direction.

\* A previous version of this article was presented at the 2006 GIREP Conference.

Our claim furthermore is that everyday and scientific explanations of motion have the same structure based in core causal knowledge, the differences being essentially due to differences in interest. We argue that this basic causal explanatory structure, which we claim the students have at their disposal (*existing knowledge*, at least implicitly), can be made to function as an explicit directive guide—a kind of advance organizer (Ausubel 1968). For students learning the scientific explanation of motion (*new knowledge*), this would provide a content-based outlook on what they are going to learn and why (*motivation*).



**Figure 1.** Causes produce deviations from how things would carry on of their own accord.

### The basic structure of explanation of motion

In this section the claims made above are described in more detail in relation to our study (see also Klaassen 2005).

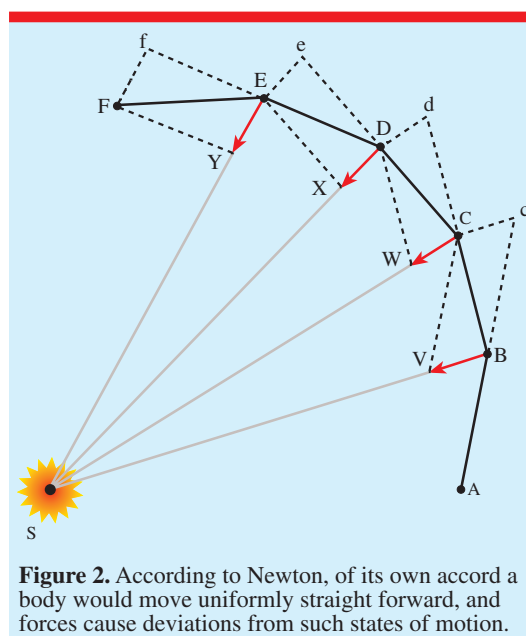
#### Core causal knowledge

Our ordinary concept of causation is one of ‘things going on as they are unless interfered with’ (Dummett 1978). Figure 1, an adaptation of a cartoon by Gotlib (1970), illustrates this idea. On the left we see a man taking a post-prandial stroll. On the right we see the same man having the happiest thought of his life. Clearly something must have happened in between to cause the change. The alleged cause is illustrated in the middle picture.

Of course, much more can be said about our ordinary concept of causality. For present purposes, however, it suffices to point out that causes effectuate *changes of state*. More formally, Descartes put it as follows: ‘each thing, provided that it is simple and undivided, always remains in the same state as far as is in its power, and never changes except by external causes’ (Descartes 1991, page 59).

#### Explanation of motion as a form of causal explanation

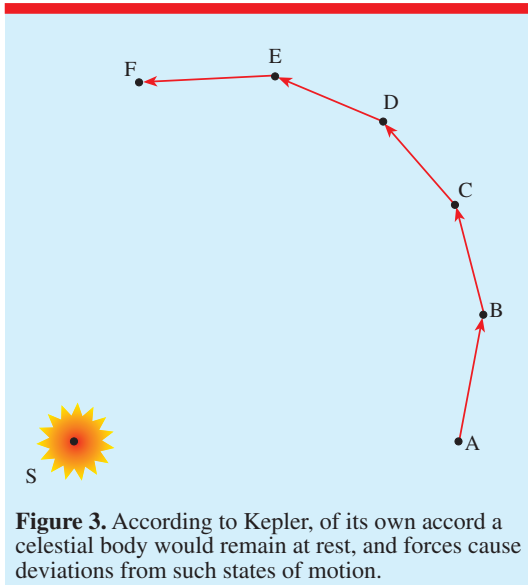
Explanation of motion can be seen as a special case of causal explanation. In this case one is concerned not with changes of state in general, but with changes of *state of motion*, and forces are the



**Figure 2.** According to Newton, of its own accord a body would move uniformly straight forward, and forces cause deviations from such states of motion.

effectuators of these changes. Let us consider the following examples.

*Newton.* In his first law, Newton explicitly states that of its own accord (force-free motion) a body would uniformly move forward in a straight line. Deviations from this motional state are caused by forces that act on the body. This is illustrated by Newton’s construction method in figure 2 (see also Newton 1999, page 444). An attractive force directed towards the sun S influences the force-free continuation B–c of the motion A–B of a planet.

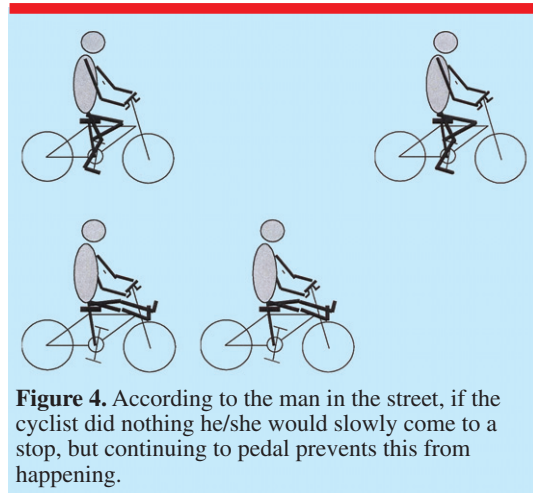


**Figure 3.** According to Kepler, of its own accord a celestial body would remain at rest, and forces cause deviations from such states of motion.

The actual motion B–C is the superposition of the force-free continuation and the deviation B–V caused by the force. Similarly for steps C–D, D–E, etc.

*Kepler.* Other assumptions for force-free motion are also possible. Kepler assumed *rest* to be the force-free motional state, at least for celestial bodies. In this case the construction is rather different (see figure 3). Here a force is required to ‘push’ the planet from A to B, from B to C, from C to D, etc, since of its own accord the planet would remain in one place. So Kepler had to somehow find forces that could ‘drag’ the planets along their paths (Kepler 1995, Stephenson 1994). Although Kepler’s theory of planetary motion does not have the same scientific status as Newton’s, at least it shows that one can have a serious go at accounting for planetary motion under the assumption of rest as the force-free motion.

*The man in the street.* A similar explanatory strategy can be seen in the explanation by the man in the street of why a cyclist should keep pedalling in order to maintain speed (figure 4). The simple answer is that if the cyclist stopped pedalling, he/she would come to a stop. In this scheme, the force takes the form of a personal influence (pedalling) and the force-free motion is the motion without this influence, i.e. to gradually come to a stop.



**Figure 4.** According to the man in the street, if the cyclist did nothing he/she would slowly come to a stop, but continuing to pedal prevents this from happening.

*A common explanatory scheme*

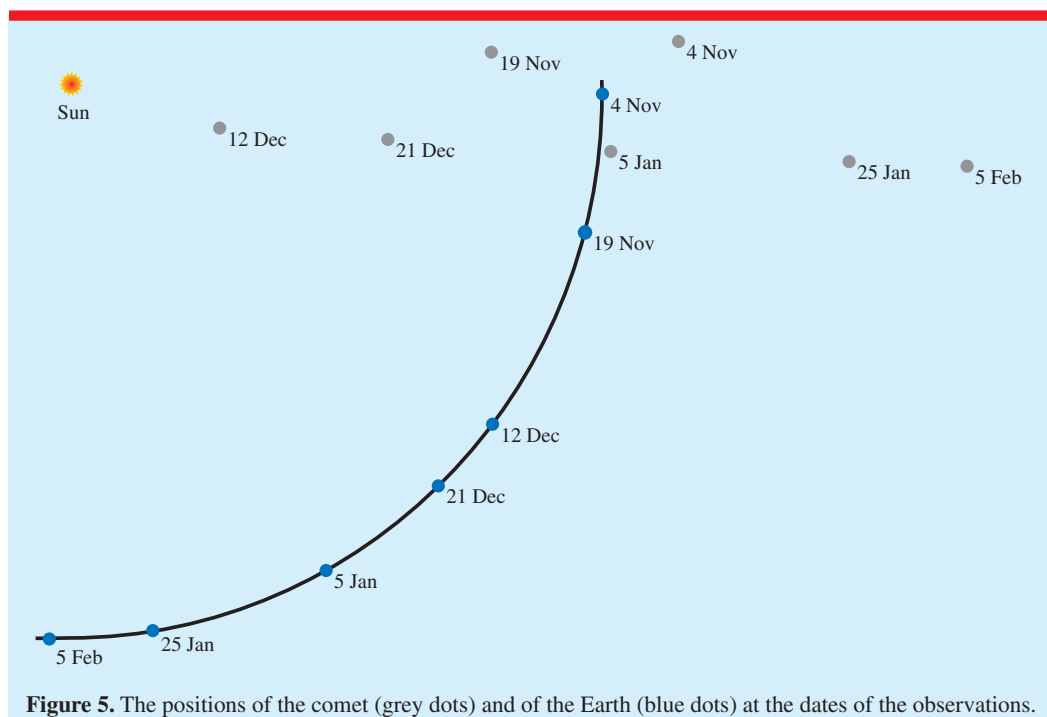
The specific explanations from Newton, Kepler, and the man in the street can now be seen to have the same basic structure.

- (A) Some assumption regarding the force-free state of motion, in combination with
- (B) Some assumption regarding force laws to account for deviations from the latter state.

The components A and B of this structure are mutually dependent. As Friedman put it: ‘Theories of interaction and the notion of free—or inertial, or geodesic, or ‘naturally moving’—particle are intimately connected’ (Friedman 1983, page 121). The structure does not tell us *what* we ought to choose as forces, states, laws, etc. But it does set *constraints* on such choices; it offers an *explanatory scheme* into which the choices we make must fit. Hence it functions as a *regulative principle* to direct and guide an investigation into the motions of bodies (Nagel 1979, page 192).

**Eliciting the basic explanatory scheme as an advance organizer**

The main point of this paper is that the basic explanatory scheme, and the core causal knowledge in which it is grounded, can also serve to direct and guide *students’ learning* about how to explain the motions of bodies. We present in some detail how we have tried to achieve this with academically streamed students at upper secondary level (approximately 16 years of age).



**Figure 5.** The positions of the comet (grey dots) and of the Earth (blue dots) at the dates of the observations.

### *An intriguing problem*

We introduce the case of a comet that was visible in the sky on some evenings in the period November 1680–February 1681. The grey dots in figure 5 represent heliocentric renderings of the observed positions of the comet. The curved line represents part of the orbit of the Earth around the Sun<sup>1</sup>.

This case suits our educational aims for the following reasons.

- (1) It immediately raises all sorts of questions. Where was the comet located at the dates it was not observed? What was its orbit? And above all, what exactly did happen between late November and early December 1680, and why?
- (2) It provides for a rich variety of student explanations. These serve on the one hand for the teacher to elicit the basic explanatory scheme, and on the other hand this can subsequently form a useful guideline for further investigation.

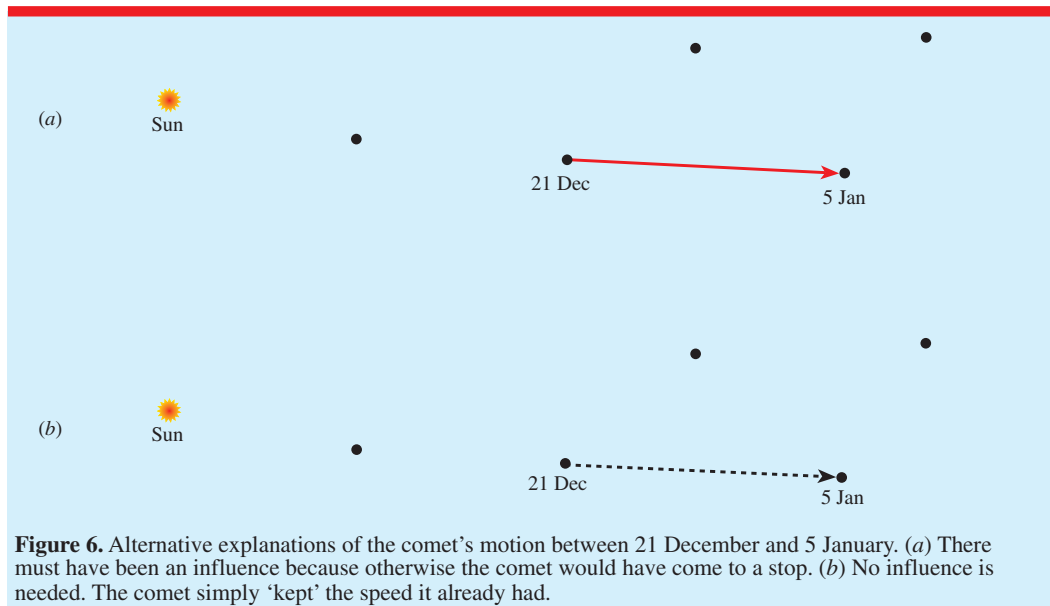
<sup>1</sup> Newton discusses this comet towards the end of Book 3 of the *Principia* (Newton 1999, page 916). In order to increase the geometric readability, we have drawn the comet and the earth in one plane. In reality, the planes in which the earth and the comet moved were nearly perpendicular.

Below we illustrate these points, based on experiences with students who discussed the case of the comet as part of our experimental course in mechanics.

### *A rich variety of student explanations*

In our try-outs the students indeed found the case of the comet intriguing. At first they were reluctant to commit their ideas to paper. Once they had been reassured, however, that the aim was not to ‘guess’ the correct trajectory of the comet but rather how they go about trying to explain its motion and the ideas underlying their approach, they contributed creatively and diversely. The following are examples of student explanations. In ‘The basic explanatory scheme as a means for organizing the students’ explanations’ we will illustrate how a teacher can use these to elicit the explanatory scheme.

Regarding the trajectory of the comet, some students supposed that it travelled around the Sun, but at least as many suggested that it turned before reaching the Sun. Almost all the students thought that the comet did not ‘turn’ by itself, and identified the Sun as the cause of the change in direction. Concerning the influence of the Sun, some reckoned that it was attractive; others that



**Figure 6.** Alternative explanations of the comet's motion between 21 December and 5 January. (a) There must have been an influence because otherwise the comet would have come to a stop. (b) No influence is needed. The comet simply 'kept' the speed it already had.

it was repulsive; in some cases it was supposed to be attractive at first and later repulsive, thus making the comet turn. A range of mechanisms was suggested to explain these influences, such as magnetism and solar winds. Apart from the Sun, some students also thought that the Earth played a role: for example, that it drew the comet somewhat out of its orbit between 4 November and 19 November. Some students believed that the motion of the comet was no longer significantly influenced between 21 December and 5 January: the comet just carried on moving simply because it already was moving. Others thought that the Sun somehow must have pushed the comet away. At this point, all the suggested explanations are considered valid.

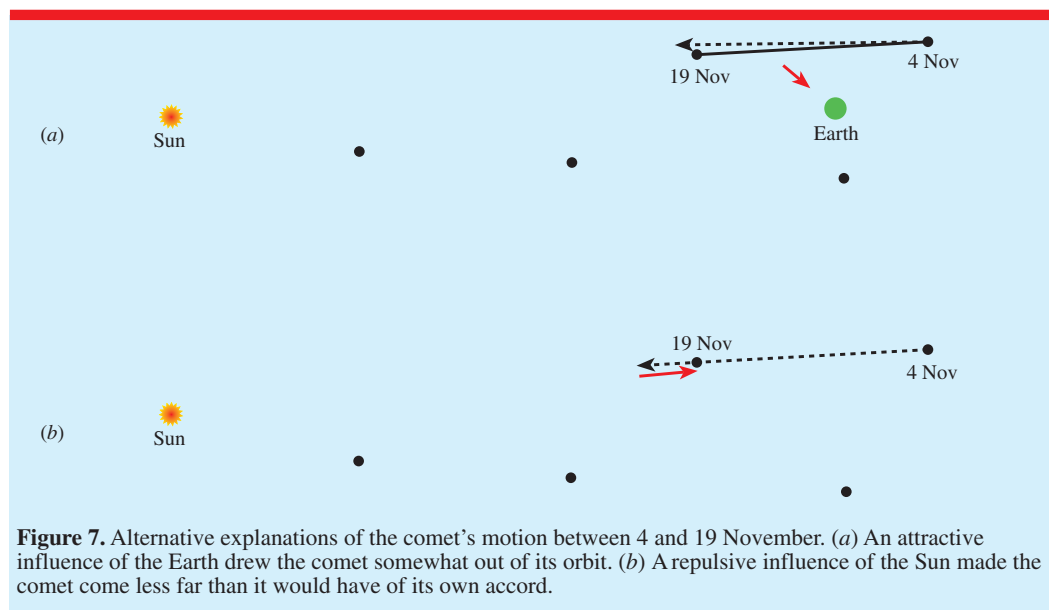
*The basic explanatory scheme as a means for organizing the students' explanations*

At first sight the task of the teacher to somehow order this great variety of ideas into a useful guideline would seem nearly impossible, but this is where the explanatory scheme comes in. The first step is to somehow make the explanatory scheme 'visible' to the students.

Component B, a characterization of force laws, is easily made explicit. However different in detail, all the students have ideas regarding sources and properties of the influences acting on the comet. But also component A, some

characterization of a force-free state of motion, can be shown to have played a role in the students' reasonings. For example, the idea that the turning of the comet had a cause rests on both components of the scheme, as follows. An idea about potential sources of influence (B) makes it plausible that for example the Sun *may* have been the cause. But it is the idea that the comet did not turn of its own accord (A) that implies that there *must* have been something to cause the change of direction.

The subtle interplay between the two components of the scheme can also be brought forward in connection with other sections of the comet's orbit. Consider for example whether or not the student thinks that some influence affected the comet's motion between 21 December and 5 January. Different answers to this question indicate different implicitly held assumptions about how the comet would have moved of its own accord, as illustrated in figure 6. Figure 7 shows alternative explanations of the comet's motion between 4 and 19 November. The common element is to explain the motion of the comet as a combination of (i) this is how it would have moved of its own accord (its force-free motion) and (ii) this is the deviation caused by some influence acting on it. The examples in figures 6 and 7 can be seen as intermediate stages on the way to formalized construction methods, as illustrated in figure 2 for Newton's assumption for force-free motion or figure 3 for Kepler's assumption.



**Figure 7.** Alternative explanations of the comet's motion between 4 and 19 November. (a) An attractive influence of the Earth drew the comet somewhat out of its orbit. (b) A repulsive influence of the Sun made the comet come less far than it would have of its own accord.

#### *The basic explanatory scheme as a directive guideline*

The aim for the students is to find out how to explain motion as precisely as possible. So even though at this point they can see how to fit their intuitive reasoning into an explanatory scheme, an important problem still remains: how to determine which of the many varied combinations of assumptions in fact serves the aim. In answering this question the basic explanatory scheme also serves as a directive guideline. It provides students with a structure to work with, and they know what types of element they need to fit into the structure. But they still need to find out how to fill in the details.

#### **Concluding remarks**

The case of the comet described above is part of an introductory course in mechanics designed as the basis for a PhD project in physics education.

#### *Overview of the course*

Very briefly, the course consists of the following.

- An introduction in which students get an impression of what mechanics is about, and its use or relevance.
- Making the basic explanatory scheme explicit, as described in 'Eliciting the basic explanatory scheme as an advance organizer'.

- Formalization of the explanatory scheme into a precise time-step by time-step construction method.
- Use of a computer to reduce the size of the time-steps, so that the precise trajectory of a body can be determined, given any combination of assumptions about the influence acting on the body and the force-free motion.
- Introduction of simplified versions of Kepler's and Newton's theories of planetary motion.
- Evaluation of the theories of Kepler and Newton.

In this last step, the students are guided by appropriate epistemological resources to decide between alternative theories. Does it make sense? Does it work? Does it work in every situation? In a computer-based modelling process of fitting and adjusting parameters, finally students arrive at a validated choice for Newton's theory.

#### *Some findings*

Our course has been tried out three times by two teachers during the period 2005–2008. On the whole, both students and teachers were well satisfied with our approach, but there were also some problems. Students, for example, are not keen to spend time learning a theory (Kepler's) that turns out to be 'wrong', although they do



generally appreciate that it is not always a matter of 'right' or 'wrong' but 'how' and 'why', and admit it probably helps to understand Newton's theory better. For the teachers the main difficulty is how to involve the students actively in the lessons, i.e. planning ahead, rather than just passively following the teacher's line of instruction.

With respect to understanding, the first impressions are that the students do come to appreciate mechanics as a powerful theoretical instrument with useful applications, this being significantly enhanced by having worked hands-on with the construction method introduced in the course. The students experience some difficulty in maintaining an overview of the various theories, the relation with their own intuitions, and the subtle grounds for choosing between theories. But on the whole the students come to a better understanding of Newton, especially his first law of motion, by also having studied Kepler.

### Acknowledgments

We want to thank Jacqueline Wooning and Vincent van Dijk for their enthusiastic and critical participation in the try-outs of our mechanics course.

Received 19 December 2007, in final form 18 April 2008  
doi:10.1088/0031-9120/43/4/014

### References

- Ausubel D P 1968 *Educational Psychology: A Cognitive View* (New York: Holt, Rinehart and Winston) pp 147–8
- Descartes R 1991 *Principles of Philosophy* (Dordrecht: Kluwer–Academic) (English translation of *Principia Philosophiae*, first published in 1644)
- Dummett M 1978 Can an effect precede its cause? *Truth and Other Enigmas* ed M Dummett (London: Duckworth) pp 319–32
- Friedman M 1983 *Foundations of Space–Time Theories: Relativistic Physics and Philosophy of Science* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- Gotlib M 1970 *Rubrique-À-Brac: Tome I* (Paris: Dargaud)
- Kepler J 1995 *Epitome of Copernican Astronomy and Harmonies of the World* (Mineola: Dover) (English translations of books 4 and 5 of *Epitome Astronomiae Copernicanae*, first published in 1620 and 1621, respectively, and of book 5 of *Harmonices Mundi*, first published in 1619)
- Klaassen K 2005 The concept of force as a constitutive element of understanding the world *Research and the Quality of Science Education* ed K Boersma, M Goedhart, O de Jong and H Eijkelhof (Dordrecht: Springer) pp 447–57

- Lijnse P and Klaassen K 2004 Didactical structures as an outcome of research on teaching–learning sequences? *Int. J. Sci. Educ.* **26** 537–54
- Nagel E 1979 *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation* (Indianapolis: Hackett Publishing Company)
- Newton I 1999 *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Berkeley, CA: University of California Press) (New English translation, based on the third (1726) edition of *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*; the first edition was published in 1687)
- Stephenson B 1994 *Kepler's Physical Astronomy* (Princeton, NJ: Princeton University Press)

**Kees Klaassen** received an MSc degree in theoretical physics in 1986, and in 1995 completed his PhD study in physics education. He is currently a senior researcher in the Freudenthal Institute of Science and Mathematics Education at Utrecht University. His main research interest concerns the development of coherent learning pathways along which students know all the time what they are doing and why.



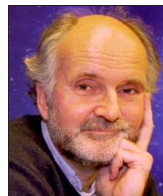
**Axel Westra** conducted a PhD study at Utrecht University on the possibility of tapping core causal knowledge in learning mechanics, which he completed in 2006. Since then he has been a high-school teacher of physics and general science at RSG Brokdele in Breukelen, the Netherlands.



**Katrina Emmett** received a BSc Honours Degree in physics with astrophysics from the University of Leeds and an MSc degree in applied physics from the University of Twente in the Netherlands. She is currently working towards a PhD in physics education at Utrecht University in the Netherlands, involving the implementation and further development of an innovative approach to mechanics.



**Harrie Eijkelhof** is professor of physics education and vice-dean of the Faculty of Science at Utrecht University. He has been involved in a variety of curriculum development projects.



**Piet Lijnse** is emeritus professor of physics education, Utrecht University.





# Introducing mechanics: II. Towards a justified choice between alternative theories of motion

Katrina Emmett, Kees Klaassen and Harrie Eijkelhof

Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University,  
The Netherlands

E-mail: [k.m.emmett@uu.nl](mailto:k.m.emmett@uu.nl)

## Abstract

In an earlier article we presented an innovative approach for introducing mechanics at upper secondary level based on the idea of tapping core causal knowledge, and we described the working of the first part of the module.

In this article we describe the second part of the module, in which we make use of the students' intuitive plausibility judgements to direct and guide a systematic evaluation of alternative theories, leading towards a justified choice of Newton's theory of planetary motion. Outcomes of our study to investigate the working of the module in classroom practice are also summarized.

## Introduction

In Klaassen *et al* (2008) we presented the first part of our approach for introducing mechanics (Klaassen 2007). Students first study the motion of Comet Kirch (1680) in order to find out which ideas underlie their own explanations of motion. We described how a common element can be recognized in how they account for the comet's motion, namely as a combination of

- (A) how the comet would have moved of its own accord (force-free motion);
- (B) the deviation caused by some influence acting on it.

We also explained our reason for wanting students to explicitly recognize this *basic explanatory structure* (the combination of A and B): the very same basic structure also underlies scientific theories of motion, such as Kepler's and Newton's theories of planetary motion.

In this article we describe the second part of our introductory course, which consists of

- formalization of the basic structure into a precise time-step by time-step construction method;
- use of a computer to reduce the time steps so that a precise trajectory can be determined given any combination of assumptions about the influence acting on a body and the force-free motion;
- introduction of simplified versions of Kepler's and Newton's theories of planetary motion;
- evaluation of the theories of Kepler and Newton.

In the last step we exploit students' intuitive notions of plausibility, empirical adequacy and generalizability to generate motivation for, and guide the students in, an evaluative process leading towards a justified choice for the Newtonian framework.

**From basic structure to construction method**

At the end of the first part of the course the students reframe their individual explanations for the motion of Comet Kirch systematically, in terms of A and B. However, the question then naturally arises as to whose explanation is the ‘right’ one and how do we find out? This is the guiding theme of the second part of the course. As a first step we point out to the students that great minds in the past also faced this problem: Kepler and Newton had very different assumptions for both the influences acting in space and how objects moved of their own accord.

*Why Kepler and Newton?*

We choose to treat both Kepler and Newton for several reasons. Kepler’s theory has visual appeal and some aspects also come much closer to the ideas that at least some students have. Furthermore, a theory is understood better when it is also understood *why* it is better than an alternative. Finally, by using concrete examples to treat the justification of a choice between theories, students get a ‘hands on’ experience of the more relevant aspects of the development of a scientific theory.

*A construction method*

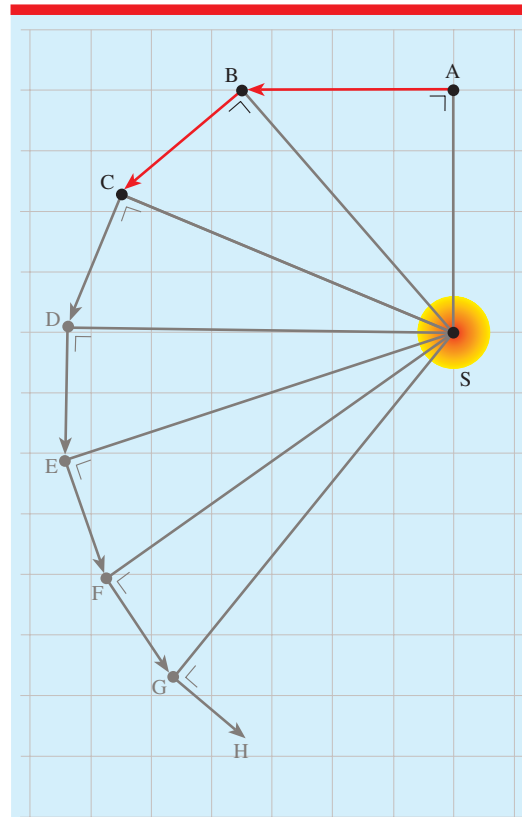
Before the students learn the theories of Kepler and Newton, the basic structure is worked out into a *method*:

- application of the basic structure at each time step;
- reduction of the time step in order to obtain a more accurate result.

Exactly how the method works depends on the assumption made for how the object moves of its own accord. We treat two possibilities:

- *rest* (Kepler’s assumption);
- *uniform rectilinear motion* (Newton’s assumption).

Our aim is that the students become familiar with the method, and that they understand it as an extension of their own ideas. Hence they first ‘try out’ the method graphically to explain the trajectory of a comet near the Sun, using two mathematically precisely defined, but ‘arbitrary’ interaction theories, one for each case. These



**Figure 1.** Construction of the comet trajectory assuming a perpendicular influence and rest as the force-free motion. AB and BC are the initial steps and are given; the construction C–D–E–F–G–H is the students’ contribution.

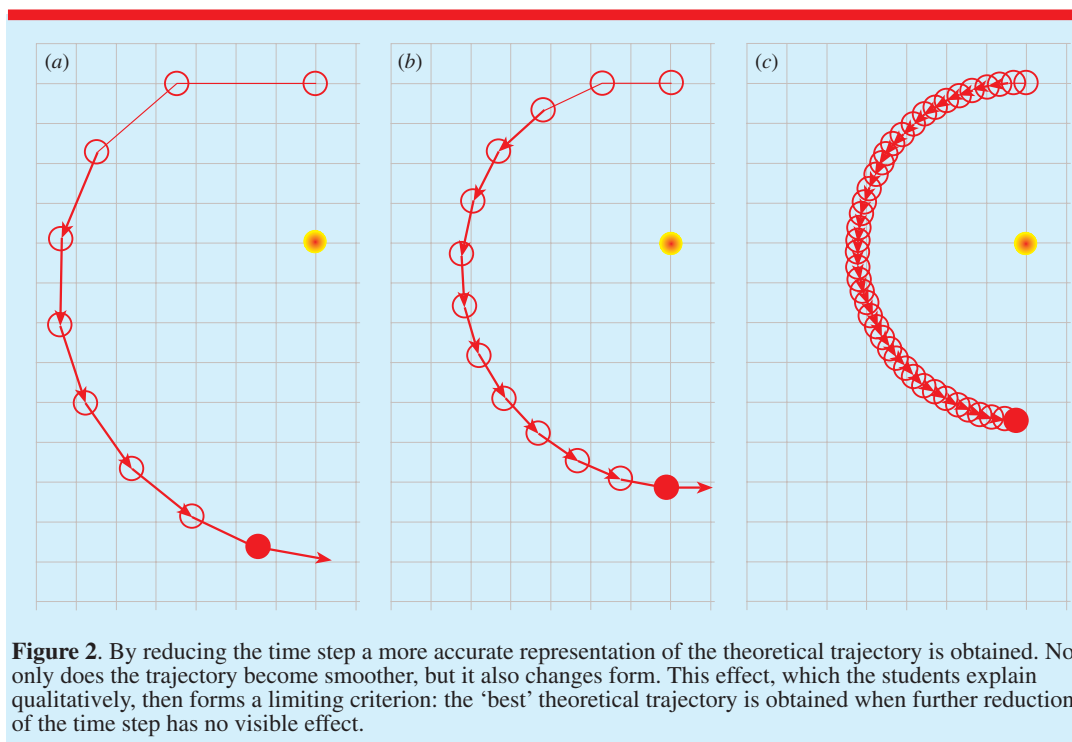
particular examples were chosen because (a) they are recognizably similar to the ideas of some of the students, but also (b) they set the stage for introducing the theories of Kepler and Newton.

*Constructions with Kepler’s assumption for motion of its own accord (rest)*

With this assumption for force-free motion the construction method is quite simple: the object moves only if an influence acts on it. In this case we assume an influence with the following characteristics:

- caused by the Sun;
- acts in a direction perpendicular to the line connecting the comet to the Sun;
- strongest closer to the Sun.

This type of influence could arise if e.g. the Sun rotated about its axis and, by its rotation, somehow dragged the comet along.



**Figure 2.** By reducing the time step a more accurate representation of the theoretical trajectory is obtained. Not only does the trajectory become smoother, but it also changes form. This effect, which the students explain qualitatively, then forms a limiting criterion: the ‘best’ theoretical trajectory is obtained when further reduction of the time step has no visible effect.

The students are provided with a graphical representation of the first two construction steps (see figure 1, A–B–C), in which the magnitude of the displacement in one day (in units of length set by the gridlines) is given by the expression

$$\text{displacement in 1 day} = \frac{14}{\text{distance to the Sun}}. \quad (1)$$

This expression was simply chosen to fit the characteristics described above; the scaling constant was chosen to give a tractable construction, but is otherwise arbitrary.

For the five subsequent time steps of one day, the students measure the distance to the Sun, compute the magnitude of the displacement and draw in the displacement vector at right angles to the line connecting the comet to the Sun *S* (see figure 1).

It follows that the assumptions enable a plausible motion to be constructed, though this does not mean of course that the assumptions are proven ‘correct’.

An interim evaluation of this construction, prompted by the question of how well it represents the real motion of a comet can serve to trigger the suggestion from the students that the time step should be reduced in order to obtain a

‘smoother’ and hence more *precise*, trajectory. The students do not do this on paper, but make use of the freeware program *Modellus*<sup>1</sup>. Figure 2(a) shows a computer representation of the students’ construction, figures 2(b) and (c) show trajectories computed with shorter time steps.

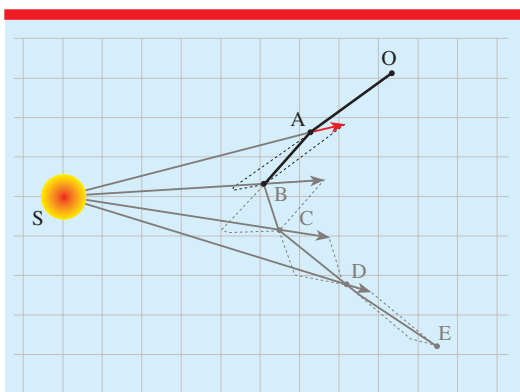
In this way the construction method is taught as something the students should be able to follow each step of the way. The computer is applied merely as a tool to attain precise results more quickly.

#### *Constructions with Newton’s assumption of motion of its own accord (uniform rectilinear motion)*

As now the comet is assumed to have a motion ‘of its own accord’, the construction method becomes more complicated. The students construct a trajectory assuming an influence as follows:

- caused by the Sun;
- repulsive;
- strongest closer to the Sun.

<sup>1</sup> The program *Modellus* can be accessed and downloaded free of charge from: <http://modellus.fct.unl.pt>.



**Figure 3.** Construction of the comet trajectory with repulsive influence and assuming uniform rectilinear motion of own accord. The construction O–A–B is the initial step (given); B–C–D–E is the students' contribution.

Some students may have suggested an influence of this type in trying to explain the comet being 'pushed away' by the Sun.

After a brief initial sequence in which elements of vector construction are taught (see Emmett *et al* 2009), the students are provided with a graphical representation of the first step of the construction (see figure 3). The magnitude of the deviation from the force-free motion (e.g. red arrow in figure 3) is taken to be (again rather arbitrarily):

$$\text{deviation during 1 day} = \frac{40}{(\text{distance to the Sun})^2}. \quad (2)$$

For the following three time steps the students then

- draw in the 'motion of its own accord';
- draw in and measure the distance to the Sun at the beginning of the time step;

- compute the magnitude of the deviation to the motion according to expression (2) and draw this into the diagram;
- complete the vector parallelogram and hence the segment of trajectory for that time step.

Again, the assumptions enable the construction of a plausible motion, although obviously this set of assumptions and the one leading to the motion of figure 1 cannot *both* be true.

As in the previous case, a better approximation to the trajectory can be obtained by repeating the construction for a smaller time step, using Modellus (see figure 4).

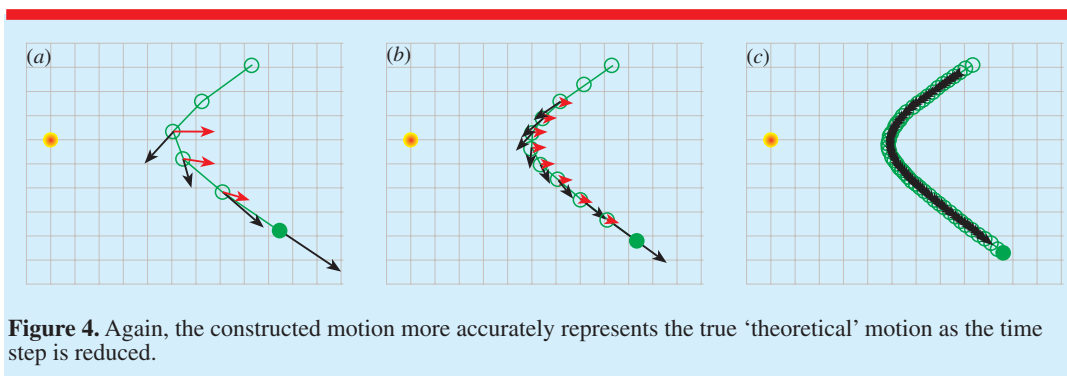
### Evaluation of alternative theories

The students now have a method by which, given a theory, i.e. a set of assumptions regarding (a) how the object would move of its own accord and (b) how the motion is affected by influences acting on the object, they can accurately construct the motion of the object.

Most of the students readily agree at this point that a valid theory must make predictions that fit with observations. The next step then makes good sense:

- determine a motion according to the theory using the construction method;
- compare the theoretically constructed motion with the observed motion.

One difficulty still remains, however, concerning the motion of Comet Kirch: the lack of observations in the critical zone near the Sun. Hence, the problem is transferred to a set of similar objects, the planets, whose motion has been observed in considerable detail since ancient times.



**Figure 4.** Again, the constructed motion more accurately represents the true 'theoretical' motion as the time step is reduced.

Now that the students understand how the method works and have a plan to work with, the planetary theories of Kepler and Newton are introduced as more solidly grounded theories to replace the ‘arbitrary’ influences used earlier.

#### *Kepler’s theory for the planets*

Although Kepler is best remembered for his mathematical laws of planetary motion, he devoted much thought towards a mechanism that could *explain* the motion of the planets (Kepler 1995). Assuming that the planets could move only if something caused them to do so, Kepler suggested two types of force, a ‘vortex’ influence and a magnetic influence.

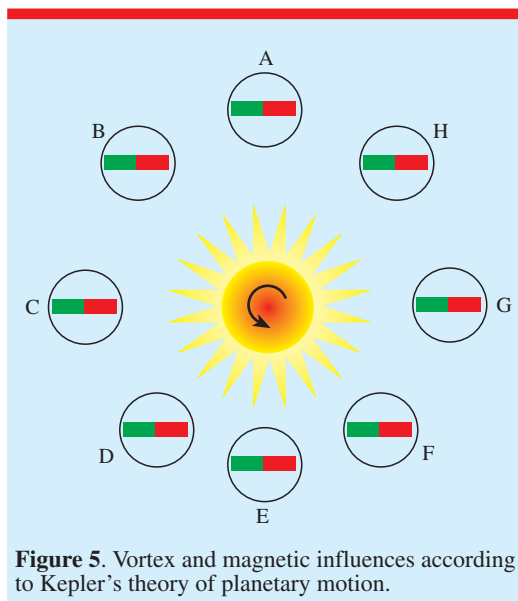
The ‘vortex’ influence was a result of the Sun emanating an ‘immaterial species’, which somehow takes hold of the planets; there is more ‘species’ and hence more ‘grip’ closer to the Sun than further away, and as the Sun rotates, the planets are ‘dragged along’ as though in a vortex of species. This influence is always perpendicular to the line connecting the Sun and the planet, with magnitude:

$$\text{magnitude vortex influence} = \frac{\text{rotational speed of Sun}}{\text{distance to Sun}}. \quad (3)$$

If this were the only effect, the planets would move uniformly in circles. However, as Kepler himself determined that this was not the case, he suggested a second influence: a sort of magnetic effect. Inside a planet, Kepler reasoned, were ‘magnetic threads’ (see figure 5). The more threads in the planet, the stronger the magnetic influence. The north pole of the threads (red) is attracted by the Sun; the south pole (green) is repelled. The influence can hence be attractive or repulsive, and its magnitude depends on how close the one pole, relative to the other, is to the Sun. The resulting qualitative effect of the combination of the two influences would hence be as follows.

- The Sun is no longer at the centre of the planetary orbit. At E the planet is closer to the Sun than at A. From A to E the planet is drawn in by the magnetic influence; from E to A it is again repelled.
- The planet moves more quickly when it is nearer the Sun. The vortex influence is greater when the planet is closer to the Sun.

This is in agreement with actual planetary motion.



**Figure 5.** Vortex and magnetic influences according to Kepler’s theory of planetary motion.

#### *Test of Kepler’s theory for Mars*

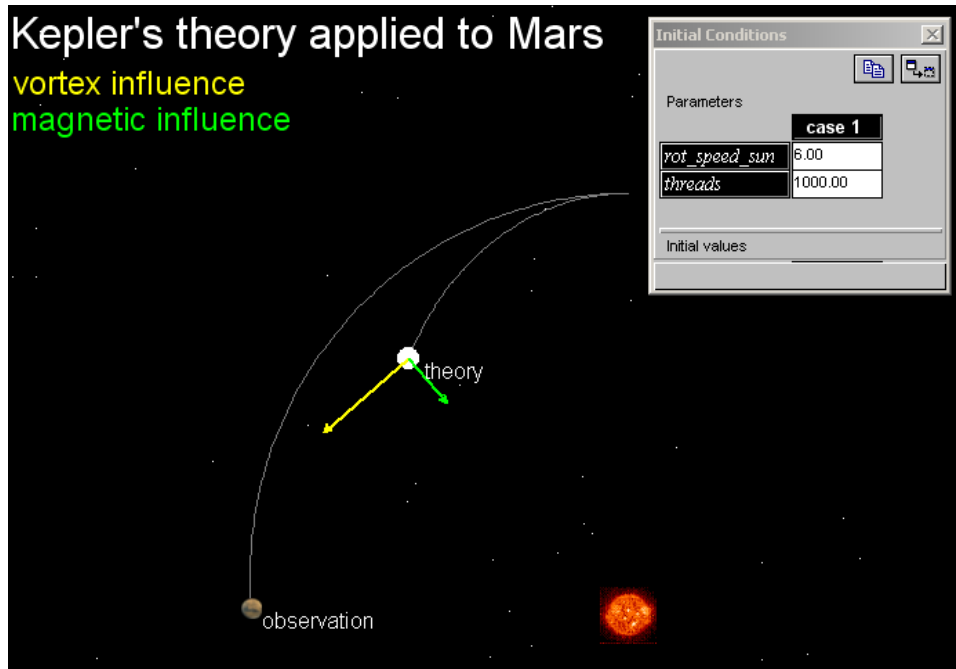
Having first learned how Kepler’s theory ‘works’ on paper, the students then test Kepler’s theory for the planet Mars using Modellus. The computer model shows both the observed motion and the motion constructed by the theory, and the two influences are also shown separately in the model.

The students try to fit the constructed motion to the observed motion by varying two dynamic parameters in Kepler’s theory, as shown in figure 6.

In figure 6, for example, the white ‘theoretical’ planet travels closer towards the Sun than the ‘real’ Mars. It also moves more slowly than the real planet. This would suggest that the number of threads should be reduced (less attraction) and the rotational speed somewhat increased (move faster). The students find out that it is indeed possible to fit the model planet to the observed orbit of Mars by choosing the right parameters. Considerable care was taken to emphasize the *physical* significance of the test models, to ensure that the students were working intentionally towards testing a theory rather than just ‘playing’ with the model on the screen.

#### *Test of Newton’s theory for Mars*

The students are then offered Newton’s theory, simplified such that the mass of the Sun is the only



**Figure 6.** Kepler's theory applied to Mars. The window on the right shows how the students can change the model parameters (rotational speed of the Sun and number of magnetic threads in the planet) in order to improve the fit.

relevant dynamic parameter:

$$\text{magnitude of attractive influence} = \frac{\text{mass of Sun}}{(\text{distance to Sun})^2}. \quad (4)$$

This influence must be combined with Newton's uniform rectilinear assumption for force-free motion and the students also test Newton's theory for Mars by using a computer model to determine whether the motion constructed using this theory can be fitted to the observed motion. They find that to be possible for a suitably chosen mass of the Sun.

#### *Choosing between Kepler and Newton*

At this point both the theories of Kepler and of Newton 'work' for Mars, and the students are asked whether or not they could choose between the two theories on the basis of this result. It is fairly obvious for the students that the 'right' theory must also work for other (similar) objects. The students hence test the two theories for Earth and Halley's Comet.

It again appears, for both theories, that the constructed motion can be fitted to the observed motion. However, there is a serious problem with

Kepler's theory. This can be seen in table 1, which shows the parameter values for the best fits.

The number of magnetic threads could well be different for each object. The problem is that the rotational speed of the Sun must have the same value for all the objects if the theory is consistent. For the case of Newton's theory, the same value for the mass of the Sun works in every case.

Hence, the students come to understand that more is required to justify a choice of scientific theory than the demand for empirical adequacy alone. The theory must also be applicable to similar objects, in a similar way; and it is here that Newton's theory is superior to Kepler's. This does not mean that Kepler has definitely been beaten. It may still be possible to adapt his theory in such a way to solve the problems encountered above. However, other demands may then start to play a role, as the students can now begin to anticipate; for example a scientific theory should not include *ad hoc* assumptions.

To close the circle, we return to Comet Kirch. With Modellus the students can now see how the comet moved according to Newton's theory and compare this to the original figure in Newton's *Principia* (Newton 1999, p 916).



**Table 1.** Parameter values of best fits for the theories of both Kepler and Newton for Mars, Earth and Halley's Comet.

	Kepler's theory		Newton's theory
	Rotational speed of Sun (rev. per day)	No. of threads	Mass ( $10^{27}$ kg)
Mars	14	268	1989
Earth	12	20	1989
Halley's comet	8	3733	1989

### Concluding remarks

The module was taught in three consecutive years in two schools. The general impression was positive, and both schools are continuing to use the module even though their formal involvement in the project has ceased. It would appear that the investment of 11 lessons is worthwhile in terms of learning outcomes. Research in the second half of the course and in subsequent lessons showed how the students were developing a 'feeling' for the Newtonian assumption of rectilinear motion and the teachers were able to make use of the construction method to analyse and discuss the intuitive notion that 'motion implies force' with the class. In the following grade the construction method formed the basis of a series of lessons to introduce motion under a constant force and several students reported appreciating learning how formulae and other expressions had been obtained rather than them being merely 'given' as in the regular course.

### Acknowledgments

We would again like to thank Vincent van Dijk and Jacqueline Wooning and their students for their contribution to the project.

Received 7 April 2009, in final form 27 May 2009  
doi:10.1088/0031-9120/44/5/007

### References

- Emmett K, Klaassen K and Eijkelhof H 2009 Fast feedback in classroom practice *Phys. Educ.* **44** 246–52

- Kepler J 1995/1621 *Epitome of Copernican Astronomy and Harmonies of the World* (Mineola: Dover)
- Klaassen K 2007 *Mechanica, een Inleidende Cursus voor 4vwo* 3rd edn (Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education) (In Dutch)
- Klaassen K, Westra A, Emmett K, Eijkelhof H and Lijnse P 2008 Introducing mechanics by tapping core causal knowledge *Phys. Educ.* **43** 433–9
- Newton I 1999/1726 *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Berkeley, CA: University of California Press)

**Katrina Emmett** received a BSc honours degree in physics with astrophysics from the University of Leeds, UK and an MSc degree in applied physics from the University of Twente, The Netherlands. She is currently working towards a PhD in physics education at Utrecht University, The Netherlands, involving the implementation and further development of an innovative approach to mechanics.



**Kees Klaassen** received an MSc degree in theoretical physics in 1986, and in 1995 completed his PhD study in physics education. He is currently a senior researcher at the Freudenthal Institute of Science and Mathematics Education at Utrecht University, The Netherlands.



**Harrie Eijkelhof** is professor of physics education and vice-dean of the Faculty of Science at Utrecht University, The Netherlands. He has been involved in a variety of curriculum development projects.

