4.2 Domeinspecifieke leerstofopbouw
4.2.12 Relativiteitstheorie
Lesmaterialen

Opgaven relativiteitstheorie Uitwerkingen en bronnen

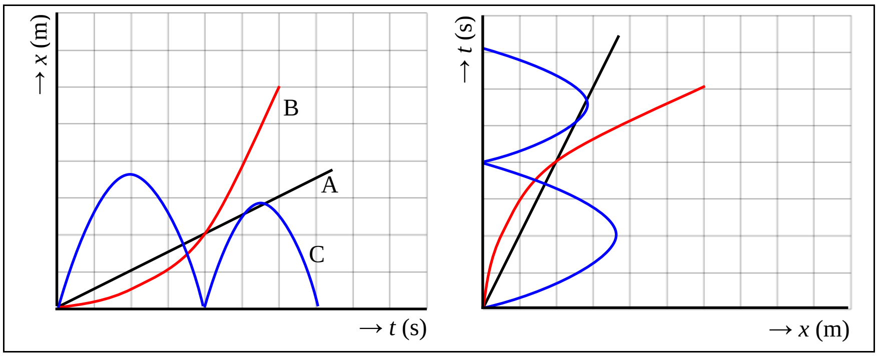
Loran de Vries

1 Uitwerkingen

Deze uitwerkingen horen bij de *Opgaven relativiteitstheorie* op de website van het Handboek natuurkundedidactiek (bij paragraaf 4.2.12). De figuurnummers in de uitwerkingen komen overeen met die in de opgavenbundel. Vakdidactisch commentaar staat bij de opgaven in een kader. Dit commentaar is over het algemeen niet gebaseerd op vakdidactisch onderzoek, maar komt voort uit de eigen ervaring van de auteur.
De opgaven zijn afkomstig van of geïnspireerd door de aan het eind van deze uitwerkingen genoemde bronnen, en dan met name het pilot-materiaal *Relativiteit* van het project *Nieuwe Natuurkunde* (Bais & Rijkenberg, 2010).

Ruimtetijddiagram

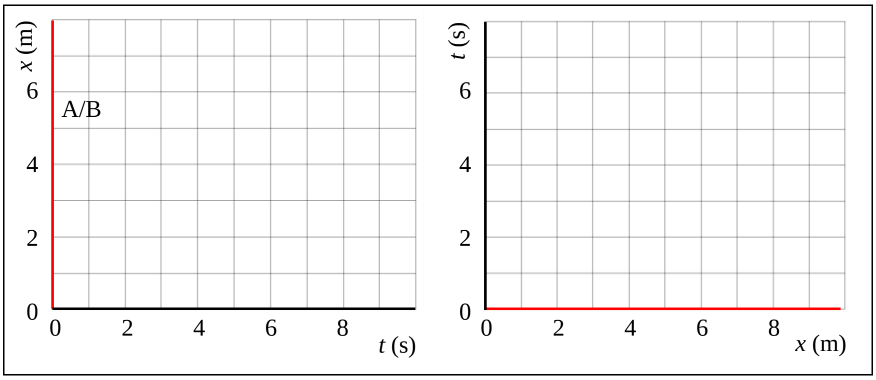
1 **a** Zie figuur 1 links.
b Zie figuur 1 rechts.



Figuur 1

Opgave 1
Deze eerste opgave maakt een bruggetje van *x,t*-grafieken naar *t,x*-grafieken. Dat de assen verwisseld zijn ten opzichte van een *x,t*-grafiek went voor de meeste leerlingen na deze opgave relatief snel. Naar mijn idee vragen vooral natuurkundedocenten zich af wat het nut is van het verwisselen van de assen. Het flauwe antwoord is dat alle boeken *t,x*-diagrammen gebruiken, dus we zullen het er mee moeten doen. Waarschijnlijk heeft het omdraaien van de assen een historische verklaring. Het beschrijven van de relativiteitstheorie met ruimtetijddiagrammen werd voor het eerst gedaan door Hermann Minkowski. Hij gebruikte niet $c \cdot t$ maar een imaginaire $i \cdot c \cdot t$ voor de beschrijving van de tijd. In het invariante ruimtetijdinterval $c \cdot t^2 - x^2$ werk je dan een minteken weg. Als je een complex getal weergeeft, gebruik je de verticale as voor het imaginaire deel, en de horizontale as voor het reële deel. Dit gebruik is zo gebleven.
De opgavenbundel leunt behoorlijk op het gebruik van ruimtetijddiagrammen. Hier wordt er zelfs mee begonnen. De reden hiervoor is dat je met ruimtetijddiagrammen bijna alle opgaven over relativiteit kunt visualiseren, en dat deze diagrammen dus gebruikt kunnen worden om het leerproces zichtbaar te maken (bijvoorbeeld via de methode van fast feedback).

2 **a** Zie de rode lijnen in figuur 2.
b Zie opgave 3.

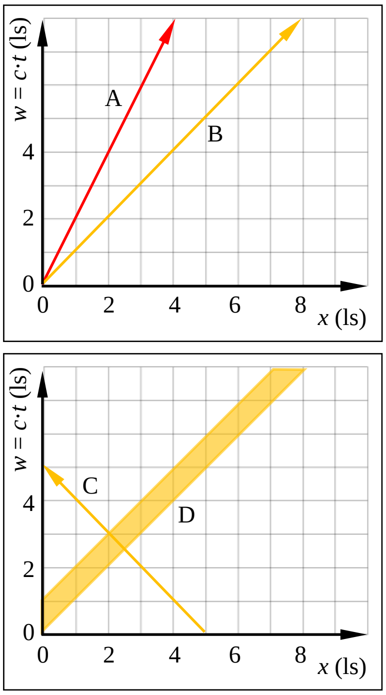


Figuur 2

Opgave 2
Deze opgave probeert de noodzaak van het kiezen van handige eenheden duidelijk te maken. Vooral leerlingen die het snappen kunnen enigszins verward raken van de in hun ogen ‘onzinnige’ wereldlijnen (de verticale in het *x,t*-diagram en de horizontale in het *t,x*-diagram) die ze moeten tekenen: “Meneer, dit is toch niet handig!?” Voor de meeste leerlingen werkt de opgave goed en wordt daarnaast de link tussen het *x,t*- en het *t,x*-diagram verdiept.
Dat het handig is om de horizontale plaats-as in te delen in lichtseconden (1 ls = 300.000 km) kunnen leerlingen na deze opgave volgen. De noodzaak om $c{\cdot}t$ op de tijd-as te zetten en dus ook de tijd in ls te meten wordt niet gevoeld (tellen in ‘seconden’ van 300.000 km). Leerlingen expliciet laten zien dat 3 ls overeenkomt met 3 ‘gewone’ seconden kan helpen:
$w = 3 \text{ ls}$ $\qquad t = ?$
$c \cdot t = 3 \text{ ls}$
$300.000\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot t = 3 \cdot 300.000 = 900.000 \text{ km} \rightarrow t = \frac{900.000}{300.000} = 3 \text{ s}$

Je kunt hier dan direct laten zien hoe je de lichtsnelheid handig kan uitdrukken:
$c = 1\,\frac{\text{lichtjaar}}{\text{jaar}} = 1\,\frac{\text{ls}}{\text{s}}$
En wat zou je dan opschrijven voor een lichtuur? Antwoord: $c = 1\,\frac{\text{lichtuur}}{\text{uur}}$. En voor een lichtmaand? Antwoord: $c = 1\,\frac{\text{lichtmaand}}{\text{maand}}$. De bovenstaande berekening wordt hiermee (nog) eenvoudiger:
$w = 3 \text{ ls}$ $\qquad t = ?$
$c \cdot t = 3 \text{ ls}$
$1\,\frac{\text{ls}}{\text{s}} \cdot t = 3 \text{ ls} \rightarrow t = \frac{3}{1} = 3 \text{ s}$

3 Zie figuur 3 boven en onder.



Figuur 3

Opgave 3
De opgaven 3a en 3b gaan relatief probleemloos. Bij opgave 3c lopen sommige leerlingen vast: “Dat kan ik in het diagram niet tekenen.” Dat komt doordat ze vasthouden aan de start van de beweging in de oorsprong. Opgave 3d wordt door bijna alle leerlingen fout gedaan. De leerlingen moeten inzien dat ze bij opgave 3a de wereldlijn van één foton hebben getekend. Teken daarna de wereldlijn van een tweede foton dat even later wordt uitgezonden op het bord, en een derde. En wanneer wordt het laatste foton uitgezonden? Inderdaad: na 1 s. Zo ontstaat de dikke lijn, samengesteld uit vele wereldlijnen. Tekenen we alle fotonen? Nee, een selectie voor het idee.

4 **a** Stip A is een gebeurtenis.
b Lijnstuk B geeft een tijdsduur aan die op één plaats verlopen is.

Opgave 4
Eigenlijk bestaat B alleen in het diagram en correspondeert het niet met iets echts. B verschijnt en verdwijnt. Een echt stilstaand voorwerp zou namelijk een verticale wereldlijn opleveren.

5 **a** Lijn B. Deze lijn beschrijft stilstand: geen pad door de ruimte, maar wel een pad door de ruimtetijd.

b Lijn A beschrijft een beweging vanuit de oorsprong in de negatieve bewegingsrichting. Lijn C beschrijft een beweging vanuit de oorsprong in de positieve bewegingsrichting, later langzamer dan eerst: in het tweede stuk wordt er tijdens veel tijd (*w*) weinig afstand (*x*) afgelegd.

c Dit zou lijn B kunnen zijn. Die lijn zou natuurlijk ook op een andere plaats getrokken kunnen worden, maar de lijn loopt ook dan verticaal omhoog.

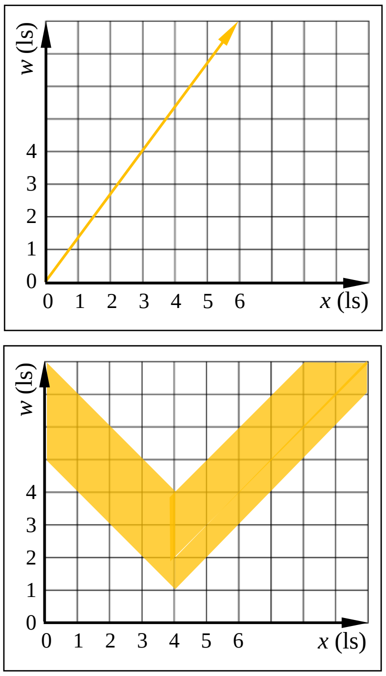
Opgave 5
Bij opgave 5a vinden sommige leerlingen het onderscheid tussen een pad door de ruimte en een pad door de ruimtetijd lastig.

6 **a** Zie figuur 6 boven.

b Zie figuur 6 onder.

c We hebben het dan over twee richtingen: naar voren en naar achteren (of naar links en naar rechts, enzovoort).

d Het licht doet er 2 s over om van $x = 4$ naar $x = 6$ te komen. Daarna wordt de plaats $x = 6$ gedurende 3 s belicht. De plaats $x = 6$ wordt dus van $t = 3$ tot $t = 6$ s belicht.



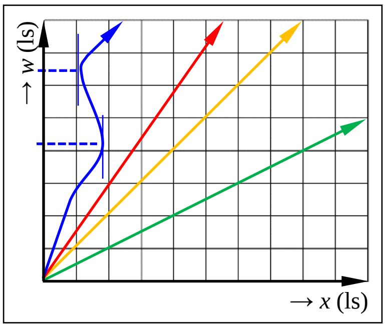
Figuur 6

Opgave 6
Wijs leerlingen er bij opgave 6d op dat ze dit ook zonder diagram kunnen beredeneren. Hoe lang duurt het voor het eerste foton om punt $x = 6$ te bereiken? Dus op welk tijdstip komt het eerste foton aan? Antwoord: 2 s na $t = 1$ s, dus op $t = 3$ s. En hoe lang voor het laatste foton? Antwoord: 2 s na $t = 4$ s, dus op $t = 6$ s.
Het expliciet tekenen van de fotonen onder het diagram langs de *x*-as kan helpen het ruimtetijddiagram concreter te maken.

7 **a** Ja, dit kan. Voorwerpen zijn dan op hetzelfde moment op dezelfde plaats.

b Het voorwerp staat stil als het zich niet verplaatst, terwijl de tijd wel doorloopt. De raaklijn aan zijn wereldlijn loopt dan verticaal. Dit is op twee tijdstippen het geval: zie de stippellijnen in figuur 7.

c Een deel van de wereldlijn loopt omlaag, dus terug in de tijd. Dit kan niet.



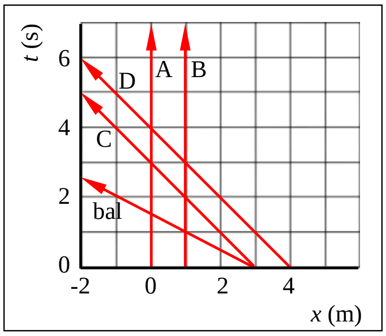
Figuur 7

8 Een pad door de ruimte verbindt ruimtelijke punten. Daar kun je dus overheen lopen, naar voren of naar achteren. Een wereldlijn geeft bij ieder tijdstip de plaats waar een voorwerp zich bevindt. Ook als je niet beweegt, leg je een pad door ruimtetijd af. Dit pad gaat maar één kant op, bezien in de tijd: naar voren.

9 **a** $x_A = x_B = x_C = x_D = 2$ m

b De snelheid van de bal ten opzichte van de waarnemers A en B is –3 m/s (of 3 m/s naar links). De snelheid van de bal ten opzichte van de waarnemers C en D is –2 m/s (of 2 m/s naar links).

c Zie figuur 10.



Figuur 10

Opgave 9
Hoewel opgave 9 simpel oogt, dient deze twee doelen: 1) dat leerlingen kunnen inzien dat je snelheid meet ten opzichte van een coördinatenstelsel, en 2) dat het belangrijk is om de neiging (van leerlingen) te onderdrukken een stelsel als lokaal te zien (één per waarnemer) in plaats van oneindig groot (Knight 2008, p.36-5).
Bij opgave 9a zullen leerlingen zeggen dat de positie voor iedereen anders is. Zij moeten inzien dat afstand en positie(nummer) niet hetzelfde zijn. De *positie* van de klap is hetzelfde voor alle waarnemers in hetzelfde coördinatenstelsel. De *afstand* tot de klap is voor elke waarnemer anders.

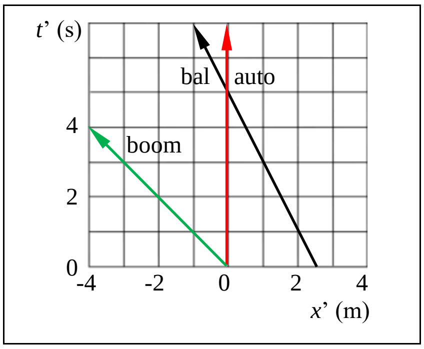
10 **a** Zie de tabel van figuur 12.

b Zie figuur 14.

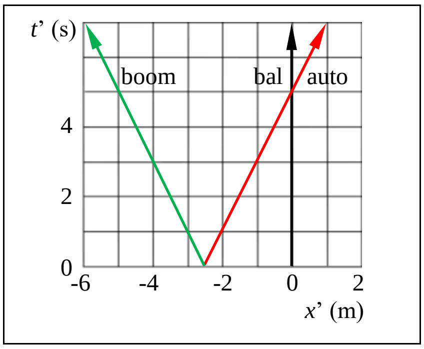
c Zie figuur 15.

snelheid (in m/s) van → ten opzichte van ↓	boom	auto	bal
boom	0	+1	+0,5
auto	–1	0	–0,5
bal	–0,5	+0,5	0

Figuur 12



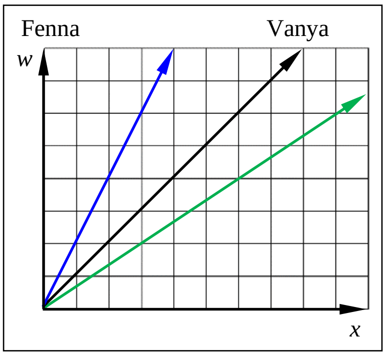
Figuur 14



Figuur 15

11a 4 m/s
b 3 m/s
c 0 m/s
d 3 m/s

12 De zinnen A en B kunnen dezelfde situatie beschrijven. De zinnen C en D ook. De zinnen A en B beschrijven een andere situatie dan C en D, maar door verandering van v in $-v$ zouden alle zinnen op één situatie kunnen slaan.

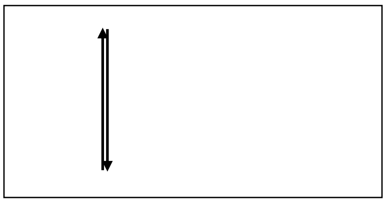


Figuur 18

13a 20 km/h
b 20 km/h
c $v_{bal} = v_{worp} + v_{truck} = 20 + 40 = 60$ km/h
d 20 km/h
e $v_{bal} = v_{worp} - v_{truck} = 20 - 15 = 5$ km/h
f 20 km/h

14a Zie de blauwe wereldlijn in figuur 18.
b Zie de groene wereldlijn in figuur 18.

Eerste postulaat

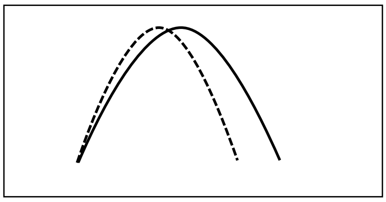


Figuur 20

15a Zie figuur 20: Ben ziet een pad van de bal dat recht omhoog gaat, en weer recht naar beneden.
b Ben en de kar bevinden zich in een ander stelsel dan een waarnemer op de grond. De stelsels bewegen met constante snelheid ten opzichte van elkaar. Het eerste postulaat zegt ons dat een identiek experiment in beide stelsels dezelfde uitkomst moet hebben, want in die stelsels gelden dezelfde natuurwetten.
OF
De situatie uit figuur 19 (kar staat stil op de grond) is identiek aan de situatie uit figuur 20 (kar rijdt met constante snelheid naar rechts): Ben staat in beide situaties stil ten opzichte van de kar.
OF
De bal heeft bij het afschieten dezelfde horizontale snelheid als de kar. Als de bal in de lucht is, houdt de bal dezelfde horizontale snelheid als de kar. De bal legt dus dezelfde horizontale afstand af, en blijft het gehele pad door de lucht boven het kanon (de zwaartekracht werkt alleen in de verticale richting en heeft geen invloed op de horizontale

beweging).

c Zie de doorlopende lijn in figuur 21: Cas ziet de bal een paraboolbaan afleggen.



Figuur 21

d De bal landt in het kanon.
Cas en de kar bevinden zich in een ander stelsel. De stelsels bewegen met constante snelheid ten opzichte van elkaar. Het eerste postulaat zegt ons dat een identiek experiment in beide stelsels dezelfde uitkomst moet hebben.
OF
De bal heeft bij het afschieten dezelfde horizontale snelheid als de kar. Als de bal in de lucht is, houdt de bal dezelfde horizontale snelheid als de kar. De bal legt dus dezelfde horizontale afstand af (de zwaartekracht werkt alleen in de verticale richting en heeft geen invloed op de horizontale beweging).

e Zie de streeplijn in figuur 21: Anna ziet de bal een paraboolbaan afleggen die even hoog komt als bij Cas, maar de bal legt een kleinere horizontale afstand af in vergelijking met het pad dat bij vraag **c** is getekend (het pad dat Cas ziet).

f De bal landt in het kanon.
Anna en de kar bevinden zich in een ander stelsel. De stelsels bewegen met constante snelheid ten opzichte van elkaar. Het eerste postulaat zegt ons dat een identiek experiment in beide stelsels dezelfde uitkomst moet hebben.
OF
De bal heeft bij het afschieten dezelfde horizontale snelheid als de kar. Als de bal in de lucht is, houdt de bal dezelfde horizontale snelheid als de kar. De bal legt dus dezelfde horizontale afstand af (de zwaartekracht werkt alleen in de verticale richting en heeft geen invloed op de horizontale beweging).

g De bal legt hetzelfde pad af, maar kar beweegt na het afschieten harder dan tijdens het afschieten. De kar beweegt dus in horizontale richting van de bal weg.
Ja, bal landt nu achter (links) van het kanon.

h $E_k < 1000$ J
De horizontale snelheidscomponent v_x is voor Anna kleiner dan voor Cas, dus ook v_{tot} is voor haar kleiner (de verticale snelheidscomponent v_y is gelijk aan die van Cas). Daarmee is ook $E_k = ½m·v^2$ kleiner.

i $E_k = 1000$ J

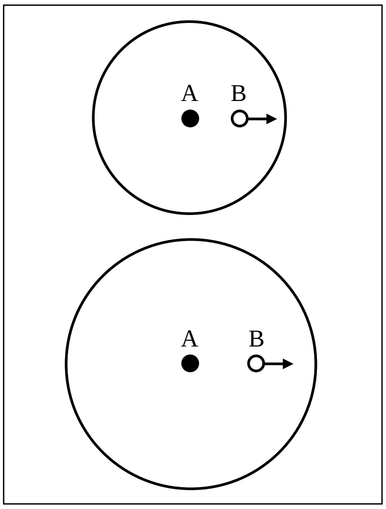
j $E_k < 1000$ J
Voor zowel Anna als Cas geldt energiebehoud: er gelden dezelfde natuurwetten (eerste postulaat), dus bij identieke experimenten moeten dezelfde wetten gelden.

16a D
b D
c A
d A
e D

Tweede postulaat

17a Nee, want dan zou A ten opzichte van B sneller gaan dan de lichtsnelheid.

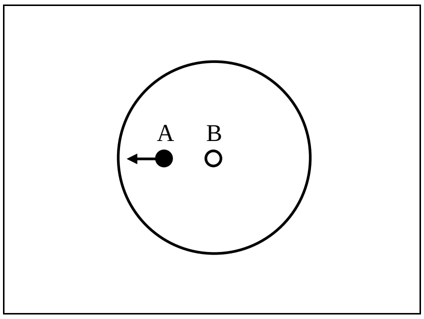
b Zie figuur 24 onder: A blijft in het midden van het golffront (de lichtsnelheid is in alle richtingen hetzelfde), de straal van het golffront is groter geworden, en de straal van het golffront is meer toegenomen dan de afstand AB.



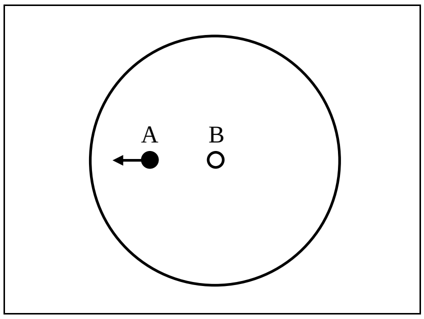
Figuur 24

c Zie figuur 25: B in het midden van het golffront (de lichtsnelheid is in alle richtingen hetzelfde). A links van B (A bewegend naar links ten opzichte van B).

d Zie figuur 26: B blijft in het midden van het golffront (de lichtsnelheid is in alle richtingen hetzelfde), de straal van het golffront is groter geworden, en de straal van het golffront is meer toegenomen dan de afstand BA.



Figuur 25

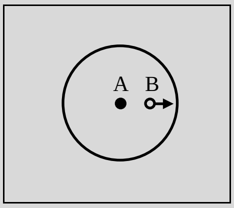


Figuur 26

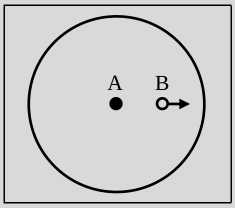
Opgave 17

Met deze opgave kan begrip van het tweede relativiteitspostulaat worden gecontroleerd. De opgave legt ook alvast de basis voor de treinparadox waarmee de relativiteit van gelijktijdigheid te behandelen is.

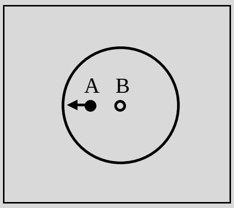
Twee leerlingen, Arnold en Britney, bewegen met constante snelheid ten opzichte van elkaar in een rechte lijn en komen elkaar tegen. Precies op het moment dat ze elkaar tegenkomen springt er een vonk tussen hen over. De vonk zendt een lichtflits uit in een cirkelvormig patroon. In figuur A zie je het golffront een korte tijd nadat de vonk oversprong, waargenomen door Arnold (A). Vraag nu aan de leerlingen de figuren B t/m D te schetsen. In figuur C tekent bijna de helft van de leerlingen A nog steeds in het midden van het golffront. A wordt wellicht gezien als de 'objectieve' waarnemer. Figuur D wordt slechts door ruwweg een kwart van de leerlingen correct getekend. Bij de rest staat hier A in het midden van het golffront, of staan zowel A als B niet in het midden van het golffront. Leerlingen zouden hier wellicht kunnen denken aan een derde 'objectieve' waarnemer.



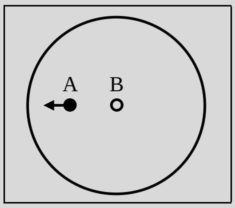
A: Golffront in het stelsel van Arnold (A), kort nadat de vonk is overgesprongen.



B: Golffront in het stelsel van Arnold even later.



C: Golffront in het stelsel van Britney (B), kort nadat de vonk is overgesprongen.



D: Golffront in het stelsel van Britney even later.

$N = 41$ Correct	Meest voorkomende fout
B: 78%	
C: 54%	41% tekent A in midden van golffront.
D: 24%	39% tekent A in midden van golffront, 20% tekent A en B niet in het midden.

Relativiteit van gelijktijdigheid

18a Arnold staat precies tussen X en Y in, en de signalen bereiken hem tegelijkertijd. Dus de rotjes ontploften precies op hetzelfde moment (want de lichtsnelheid is in beide richtingen gelijk en de afstand is even groot).

b Britney is dichter bij X dan bij Y, dus het signaal van X zal haar eerder bereiken dan het signaal van Y.

c Hoewel Britney het licht van rotje X eerder ontvangt dan het licht van rotje Y, wil dat niet zeggen dat rotje X ook eerder ontplofte. De gebeurtenis 'rotje ontploft' hoeft niet op hetzelfde tijdstip plaatsgevonden te hebben als de gebeurtenis 'licht van rotje bereikt waarnemer'. Britney is een intelligente waarnemer. Dit betekent dat zij kan corrigeren voor het verschil in reistijd. Als ze dat doet, zal zij net als Arnold concluderen dat de rotjes tegelijkertijd ontploften. Arnold en Britney zitten in hetzelfde stelsel (want ze bewegen niet ten opzichte van elkaar), dus zijn ze het over gelijktijdigheid altijd eens.

Opgave 18
Waar de vragen a en b door de meeste leerlingen correct worden beantwoord, gaat vraag c bij de meeste leerlingen fout.

19a Net als bij lichtsignalen: meet de afstand, noteer de aankomsttijd, en reken terug met v: $t_{zend} = t_{aankomst} - x_{Arnold\text{-}pieper}/v_{geluid}$.

b Assistent(e) staat bij de pieper en meet de tijd. Arnold en de assistent(e) hebben gesynchroniseerde klokken.

c Zoveel mogelijk assistenten door de stad verspreiden (bijvoorbeeld 10 m van elkaar) met ieder een klok. Alle klokken zijn gesynchroniseerd.

d

20a Assistenten bij de pieper en de hoorn zetten met klokken die gesynchroniseerd zijn met de klok van Arnold. Tijd noteren en later onderling vergelijken.

b Als de honk van de hoorn en de piep van de pieper gelijktijdig aankomen bij Arnold, moet de gebeurtenis 'pieper piept' eerder hebben plaatsgevonden dan de gebeurtenis 'hoorn honkt' (want het geluidssignaal van de piep heeft een grotere afstand af te leggen dan het geluidssignaal van de honk). Dus als we zeggen dat twee gebeurtenissen gelijktijdig plaatsvinden, bedoelen we niet dat de signalen gelijktijdig bij een waarnemer aankomen, maar vergelijken we de tijdmetingen van de waarnemer en alle assistenten in zijn/haar coördinatenstelsel.

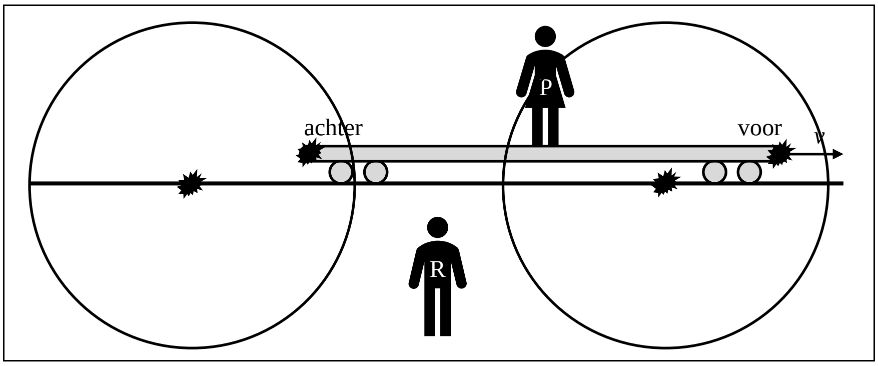
21a De golffronten starten bij de roetvlekken op de rails en gaan beide met de lichtsnelheid richting Rens (de lichtsnelheid is in alle richtingen hetzelfde). Rens staat precies tussen de roetplekken in. De afstand van Rens tot de roetvlek links van hem is dus exact gelijk aan de afstand tot de roetvlek rechts van hem. Deze twee gelijke afstanden wordt met gelijke snelheid afgelegd. Dit kost dus evenveel tijd: $t_{links} = x_{links}/c = x_{rechts}/c = t_{rechts}$. De golffronten komen dus precies op hetzelfde moment aan bij Rens. Dit kan alleen als de rotjes (in het stelsel van Rens) precies op hetzelfde moment zijn ontploft.

b Gerard bevindt zich in hetzelfde stelsel als Rens (Rens en Gerard bewegen niet ten opzichte van elkaar). De volgorde van gebeurtenissen moet dus ook hetzelfde zijn. Hoewel Gerard het lichtsignaal van het voorste rotje het eerst zal zien, moet Gerard eerst corrigeren voor de reistijd van het lichtsignaal (de afstanden van de roetvlekken tot Gerard zijn hem bekend). Als hij dit doet, zal hij moeten concluderen dat de rotjes aan de voor- en achterkant tegelijkertijd ontploften. Gerard ziet het lichtsignaal van de voorkant alleen maar eerder, omdat hij er dichter bij staat. Er is dus een verschil tussen de gebeurtenis 'rotje ontploft' en de gebeurtenis 'lichtsignaal van ontploft rotje bereikt waarnemer'. Gerard is een 'intelligente waarnemer' en is in staat om te corrigeren voor de reistijd van het signaal van de bron naar de waarnemer.

c Zie figuur 32.

d Rens en Puk staan precies tegenover elkaar als de rotjes ontploffen. De golffronten bereiken Rens tegelijkertijd (zie antwoord bij vraag **a**). Dit kan alleen allebei waar zijn als gebeurtenis 1 'het voorste rotje ontploft' op hetzelfde moment plaatsvond als gebeurtenis 2 ‘Rens en Puk passeren elkaar’.

e Puk beweegt naar de voorste roetvlek op de rails toe (de voorste roetvlek is het midden van het golffront, de bron van de fotonen van het voorste rotje). Daardoor zal het golffront van de voorkant Puk eerder raken. Puk beweegt van de achterste roetvlek op de rails weg (de achterste roetvlek is het midden van het golffront, de bron van de fotonen van het achterste rotje). Deze fotonen hebben meer afstand af te leggen en zullen haar later bereiken dan de fotonen afkomstig van het voorste rotje.



Figuur 32

22a Ja, want Puk beweegt naar het midden van het golffront afkomstig van de voorkant toe. De muziek zal spelen.

b De muziek moet ook gespeeld hebben voor Puk. Rens heeft de muziek gehoord en dus moet de speler gespeeld hebben. Dit is de wet van oorzaak en gevolg. Stel dat er in plaats van wel of niet spelen een schot was gelost: Puk is dood (lichtsignalen komen na elkaar bij Puk), of Puk is levend (lichtsignalen komen tegelijkertijd aan). Dit kan niet allebei waar zijn. Zie ook het kader hiernaast.

Opgave 22b
Wellicht heb je anders (foutief) geredeneerd: Puk staat in het midden van de trein. De afstand die het licht moet afleggen van de rotjes naar Puk is identiek en verandert niet. Ook de lichtsnelheid is in beide gevallen gelijk, dus komen de signalen tegelijkertijd bij Puk en de ghettoblaster. Conclusie: de ghettoblaster speelt niet.
Deze laatste redenering is fout, omdat je ervan uitgaat dat de rotjes tegelijkertijd ontploften voor Puk. Maar dat is nergens gezegd. Ze zijn tegelijkertijd voor Rens, maar nu blijkt dus niet voor Puk.

23a Rens heeft de muziek gehoord, en dus moet de speler gespeeld hebben. Dit is de wet van oorzaak en gevolg.

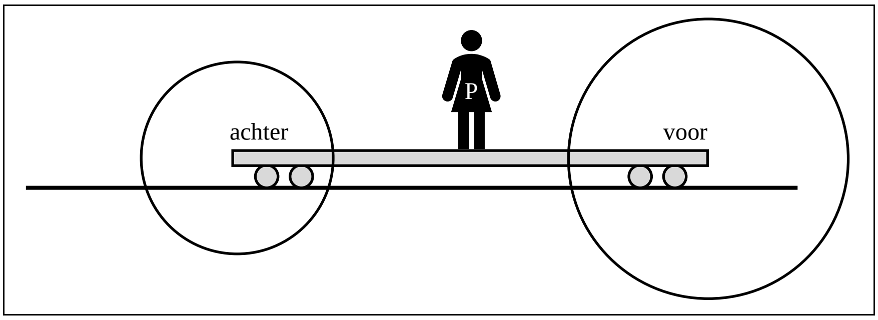
b Ook Puk moet dus Beethoven hebben gehoord.

24a De muziek heeft gespeeld, dus moet het golffront van de voorkant Puk eerder bereiken.

b Tweede postulaat. Gelijk dus.

c Het voorste rotje ontploft voor Puk eerder dan het achterste rotje. Het golffront van de voorkant kan Puk alleen maar eerder bereiken als het voorste rotje eerder is ontploft dan het achterste rotje. In haar stelsel veranderen de afstanden tot Puk en de rotjes niet, en ook de lichtsnelheid is hetzelfde. Dus moet het voorste rotje eerder zijn ontploft.

d Zie figuur 34.



Figuur 34

25 Het voorste rotje ontploft voor Anna eerder dan het achterste rotje. Anna bevindt zich in hetzelfde (inertiaal)stelsel als Puk (want Anna en Puk hebben dezelfde snelheid, en bewegen niet ten opzichte van elkaar). De volgorde van gebeurtenissen moet dus ook hetzelfde zijn. Hoewel Anna het lichtsignaal van het achterste rotje het eerst zal zien, moet Anna eerst corrigeren voor de reistijd van het lichtsignaal (de afstanden van de roetvlekken tot Anna zijn haar bekend). Als zij dit doet, zal ook zij moeten concluderen dat het rotje aan de voorkant eerder ontplofte dan het rotje aan de achterkant. Anna ziet het lichtsignaal van de achterkant alleen maar eerder omdat zij er dichterbij staat. Er is dus een verschil tussen de gebeurtenis 'rotje ontploft' en de gebeurtenis 'lichtsignaal van ontploft rotje bereikt waarnemer'. Anna is een 'intelligente waarnemer' en is in staat om te corrigeren voor de reistijd van het signaal van de bron naar de waarnemer.

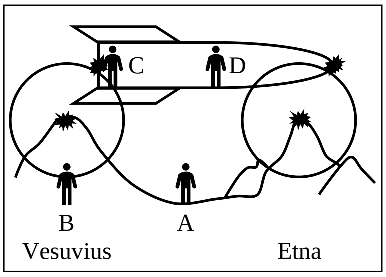
26a De waarnemers A en B bevinden zich in hetzelfde inertiaalstelsel (want ze staan stil ten opzichte van elkaar). Dus als de vulkanen voor A tegelijkertijd uitbarsten, doen ze dat ook voor B.

b
- Voor A vertrekken de fotonen van de uitbarstingen vanaf de brandvlekken op de vulkanen.
- Voor het raketstelsel vertrekken de fotonen vanaf de brandvlekken op de raket. Het licht van de uitbarstingen vertrekt in cirkelvormige golffronten, dus weg vanuit twee punten die stilstaan voor C.
- In het raketstelsel beweegt A naar de golfbron van de Vesuvius (brandvlek achterkant raket) toe en weg van de voorste brandvlek op de raket (golfbron van de Etna).

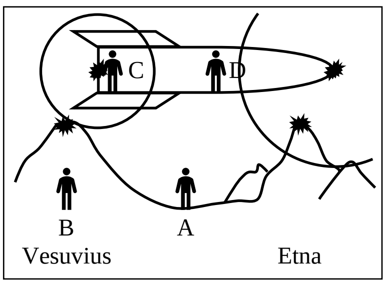
c Op het moment dat A de signalen gelijktijdig ontvangt, is A dichterbij de golfbron van de Vesuvius (brandvlek achterkant raket). En op het moment van uitbarsten is A is verder verwijderd van de brandvlek op de voorkant van de raket (golfbron van de Etna). Het licht van de golfbron van de Etna moet een grotere afstand afleggen dan het licht van de golfbron van de Vesuvius naar A. Dus moet de Etna eerder zijn uitgebarsten.

d
- D staat in hetzelfde stelsel als C, dus uitspraken voor D zijn ook waar voor C.
- Voor A vertrekken de fotonen van de uitbarstingen vanaf de brandvlekken op de vulkanen.
- Vanuit A gezien zal het golffront van de Etna waarnemer D eerder bereiken dan het golffront van de Vesuvius. Dit moet voor D ook zo zijn. Als je dit niet gelooft: zet bij D een ghettoblaster die gaat spelen als er een foton aankomt en stopt als het andere foton aankomt. De muziek speelt voor A, en moet ook gespeeld hebben voor D. A heeft de muziek gehoord en dus moet de ghettoblaster gespeeld hebben. Dit is de wet van oorzaak en gevolg. Stel dat er in plaats van wel of niet spelen een schot was gelost: D is dood (lichtsignalen komen na elkaar bij D), of D is levend (lichtsignalen komen tegelijkertijd aan). Dit kan niet allebei waar zijn.
De waarnemers C en D zitten in hetzelfde stelsel, dus ook voor C moet (na correctie voor de reistijd naar C) het golffront van de Etna D eerder bereiken dan het golffront van de Vesuvius. Zie figuur 38A.
- Voor het raketstelsel vertrekken de fotonen vanaf de brandvlekken op de raket. Het licht van de uitbarstingen vertrekt in cirkelvormige golffronten, dus weg vanuit twee punten die stilstaan voor C.
- Voor D verandert de afstand tot de brandvlekken op de voor- en achterkant van de raket niet (D staat stil in de raket).

e Voor D verandert de afstand tot de brandvlekken op de voor- en achterkant van de raket niet (D staat stil in de raket). Ook de lichtsnelheid is hetzelfde, dus het golffront van de Etna kan D alleen maar eerder bereiken als in het stelsel van de raket de Etna eerder uitgebarsten is dan de Vesuvius. Zie figuur 38B.
Volgens C vindt de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit' plaats *na* de gebeurtenis 'Etna barst uit'.



Figuur 38A



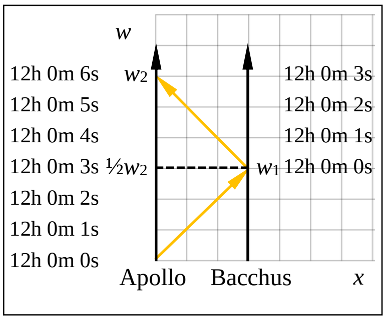
Figuur 38B

Klokken synchroniseren

27a $x = 0$

b $w = 0$

c Lijnen die gelijke tijdstippen met elkaar verbinden moeten wel evenwijdig aan elkaar lopen. Als zij dat niet deden, zouden ze elkaar snijden. Dan zou het snijpunt twee verschillende tijdstippen weergeven, hetgeen onzin is. Een horizontale stippellijn door de oorsprong is de lijn die de tijdstippen t = 0 verbindt. Het enige wat op deze lijn van punt tot punt varieert, is de x-coördinaat. Je noemt een lijn met deze eigenschap een plaats-as, hier de x-as (maar ook de lijn w = 1 is een plaats-as/liniaal).



Figuur 40

28a De afstand tussen Apollo en Bacchus is 3 ls; het licht doet er 3 s over om die afstand af te leggen. Om heen en weer te gaan dus 6 s. Apollo's klok wijst 12h 0m 6s aan.

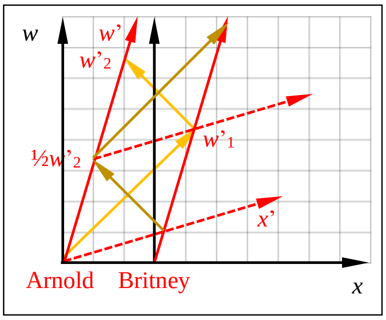
b Het licht is van Bacchus naar Apollo 3 s onderweg geweest. Als Apollo het signaal van Bacchus ontvangt, wijst Bacchus' klok dus 12h 0m 3s aan. Apollo moet daarom haar klok 3 s terug zetten. Zie figuur 40. Vanaf dan zijn de klokken gesynchroniseerd.

Opgave 28
Als je de tijdstippen één voor één (eerst Apollo dan Bacchus) tekent zoals in figuur 40, valt bij veel leerlingen die het niet snappen het kwartje.

29a Als twee klokken gesynchroniseerd zijn, betekent dit dat ze exact gelijk lopen. Als jij door jouw verrekijker naar een verre klok kijkt, heeft het licht van die klok tijd nodig om jou te bereiken. Denk na over het licht van de klok als een serie foto's die op jou afgevuurd wordt. Beschouw een klok op 300.000 km afstand van jou. Het licht (de 'foto') dat om 11h 59m 59s verzonden is, zal precies één seconde later bij jouw oog aankomen. De klok naast jou geeft op het moment dat dit licht jou bereikt precies 12.00 uur aan. De 90^e^ klok heeft er $90 \cdot 10^6/(3{,}0 \cdot 10^8) = 300$ s = 5 minuten voor nodig om jou te bereiken. Je ziet deze klok dus 11.55 aangeven.

b Intelligente waarnemers corrigeren voor de reistijd van het signaal. Het kost het licht 5 minuten om jouw oog te bereiken. In die 5 minuten is klok 90 net als jouw klok 5 minuten verder getikt. Op het moment dat jij 11.55 ziet op klok 90, staat deze op dat moment gelijk met jouw klok. Beide geven dan 12.00 uur aan. Dit betekent dat de klokken gesynchroniseerd zijn. Daarmee is deze waarneming dus volledig in overeenstemming.

30 Nee, het licht heeft tijd nodig om Sander te bereiken. Omdat de lichtsnelheid 0,3 miljoen km/s is, heeft het voor die 78 miljoen km 78/0,3 = 260 s nodig. De klok op Mars, zoals je die op t = 23.00.00 ziet op aarde, geeft 22.55.40 aan.



Figuur 42

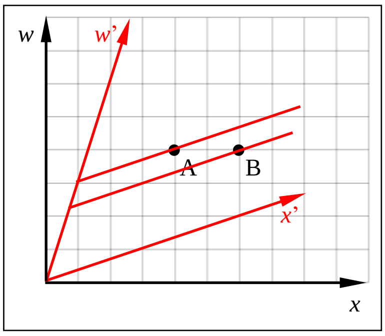
31a Arnold (rode lijn) legt 1,5 hokje naar rechts af in 5 tijdhokjes. Zijn snelheid is dan 1,5 ls/5 s = $0{,}3 \cdot c$ ten opzichte van zwart.

b Ja, de wereldlijnen van fotonen lopen altijd onder hoeken van 45° met de verticale en horizontale as. Dit komt doordat fotonen in 1 s een afstand van 1 ls afleggen. Hierdoor staan die wereldlijnen loodrecht op elkaar.

cd Van buiten de trein gezien is het licht langer onderweg op de heenweg dan op de terugweg. Het licht heen legt dan ook een grotere afstand af dan terug. Binnen de trein ligt de situatie anders: de afstand Arnold-Britney is voortdurend even groot als de afstand Britney-Arnold. De lichtsignalen zijn daarom in de trein even lang onderweg en leggen dus ook even grote afstanden af.
Dat zij even lang onderweg zijn, stelt Arnold en Britney in staat hun klokken te synchroniseren volgens de bekende procedure.

e Bedenk dat in het rode stelsel de gestippelde lijnen de gelijktijdigheidslijnen zijn. Omdat in A een rood tijdstip $t' = 0$ is, moet Britney haar signaal zenden op hetzelfde tijdstip, dus getekend vanaf het snijpunt van Britney's wereldlijn en de rode t' = 0-as. Zie figuur 42.

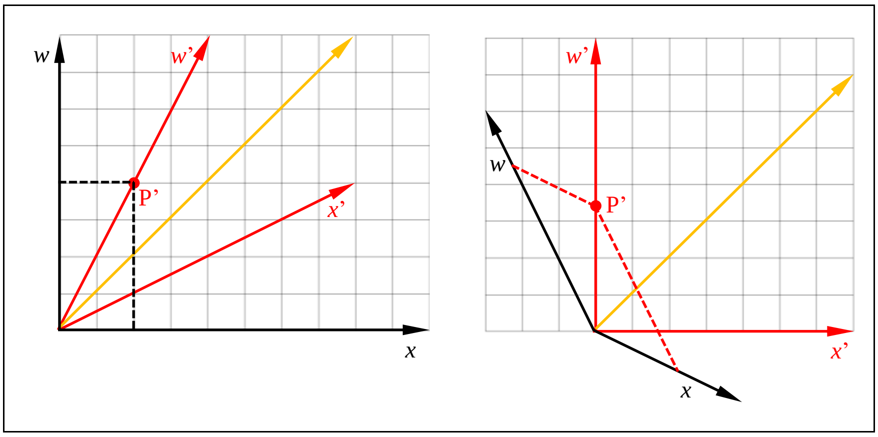
Opgave 31
In opgave 31 wordt het kloksynchronisatie-experiment van opgave 30 door waarnemers A en B uitgevoerd in een met grote snelheid voortrazende trein. Langs de verticale tijd-as zien we direct dat het lichtsignaal er op de heenweg langer over doet (4,2 s) dan op de terugweg (2,1 s). Dit lijkt in strijd met het eerste postulaat. Nu wijs je erop dat de tijd-as van A aan de vergelijking $x' = 0$ moet voldoen. Tijd meten we dus langs de wereldlijn van A (het polshorloge dat A altijd bij zich heeft). Halverwege deze wereldlijn is dus gelijktijdig met het moment van terugkaatsen. We vinden nu een schuine gestippelde gelijktijdigheidslijn en evenwijdig daaraan de evenwijdigheidslijn door $w' = 0$. Dit is per definitie de x'-as. De lijn $w' = 0{,}5 \cdot w_2'$ is ook een x'-as, alleen dan met een andere keuze voor de oorsprong.
Ga niet te snel door deze redenering heen. Je bent leerlingen al snel kwijt als ze een stap missen.



Figuur 44

32 De rode lijnen van gelijktijdigheid lopen niet horizontaal: zie figuur 44. In het rode stelsel gebeurt B vóór A.

33a Zie figuur 45 links.
b Zie figuur 45 rechts.



Figuur 45

Opgave 33
Sommige leerlingen vinden het moeilijk als zij de ruimtetijdcoördinaten moeten aflezen in het bewegende stelsel van een gebeurtenis die buiten de schuine assen valt. Hoewel het bij de opgaven weergegeven stappenplan nog steeds geldig is. Het schuine assen-stelsel geldt voor beweging naar rechts. Tekenen van een beweging naar links vinden sommige leerlingen lastig: ze kunnen nog wel de schuine tijd-as tekenen, maar hebben moeite met het tekenen van de schuine plaats-as.

34a 1 = 3, 5, 4, 2
b 1, 3, 2 = 4, 5
c 3 = 5, 1 = 4, 2
d 1, 3, 2 = 4, 5
e Midden tussen lantaarnpaal 1 en 2, of x = 3 ls.

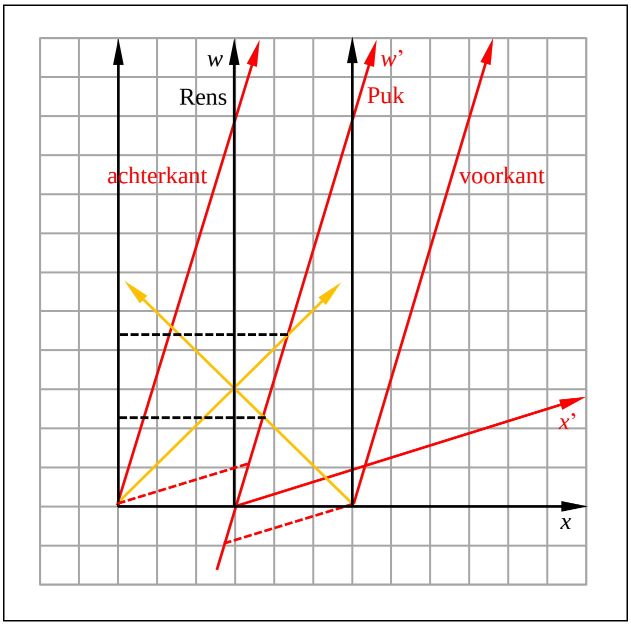
35a B = E, D, A, C
b B, A, D, E, C
c E, D, B, A = C
d B, D, E, A = C
e De tijdvolgorde van A en B is gelijk in alle stelsels, want A zit in de toekomst of voorwaartse lichtkegel van B.
f De tijdvolgorde van A en D is niet gelijk in alle stelsels, want A zit buiten de voorwaartse lichtkegel van D.

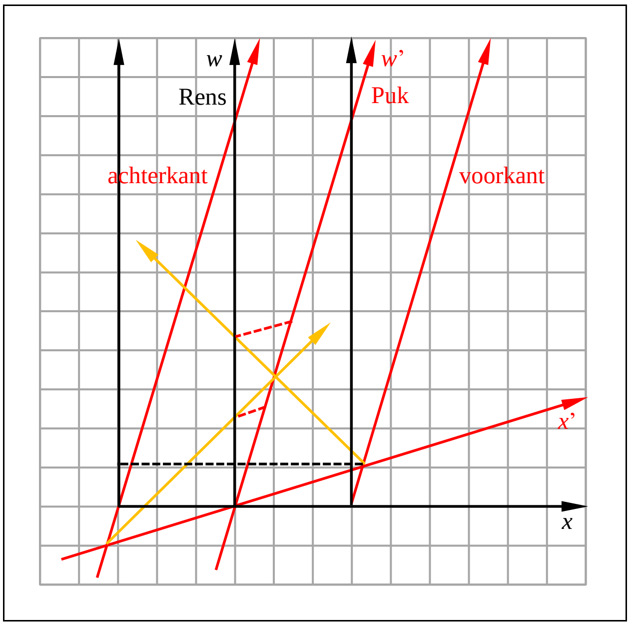
36a Zie de figuur hieronder links.

b Op $w = 3$ ls, dus na 3 s.

c Nee. Het lichtsignaal (de gele wereldlijn) van het voorste rotje bereikt Puk eerder dan het lichtsignaal (de gele wereldlijn) van het achterste rotje. Dit neemt Rens waar langs de zwarte *w*-as (zwarte stippellijnen). Dit is ook zo volgens Puk. Zij neemt de lichtsignalen waar op het moment dat ze haar *w*'-as snijden.
Rens vindt dit logisch, want in het stelsel van Rens beweegt Puk naar de voorste brandvlek op de rails toe (de bron van het golffront van het voorste rotje, hiervandaan vertrekken de fotonen, want hier was de voorkant van de trein bij het ontploffen) en Puk beweegt weg van de achterste brandvlek op de rails (de bron van het golffront van het achterste rotje, hiervandaan vertrekken de fotonen, want hier was de achterkant van de trein bij het ontploffen).

d Nee. We kunnen dit aflezen in het ruimtetijddiagram langs de rode *w*'-as (rode stippellijnen). Het rotje aan de voorkant is eerder ontploft dan het rotje aan de achterkant.
Daarnaast is dit de enige manier hoe Puk kan verklaren hoe het lichtsignaal van het voorste rotje haar eerder bereikt dan het lichtsignaal van het achterste rotje. Volgens Puk bewegen de uiteinden van de trein niet ten opzichte van haar. Dit zijn volgens haar de golfbronnen (de punten waarvandaan de fotonen vertrekken). Dus kan het lichtsignaal van de voorkant haar alleen maar eerder bereiken als het voorste rotje eerder is ontploft dan het achterste rotje.
Twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn voor Rens zijn dat – hoe gek het ook klinkt – dus niet voor Puk. Gelijktijdigheid is relatief (hangt af van het coördinatenstelsel).



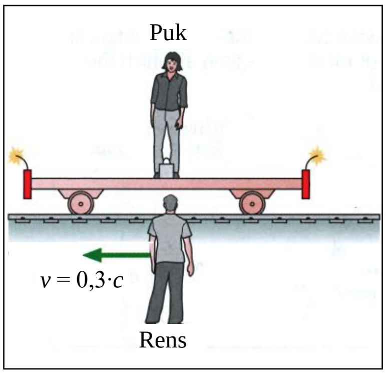


efg Zie de figuur hierboven rechts.

h Zie de figuur hierboven rechts: fotonen tekenen we in elk stelsel op dezelfde manier. Alle fotonen maken dus een hoek van 45° met de horizontaal.

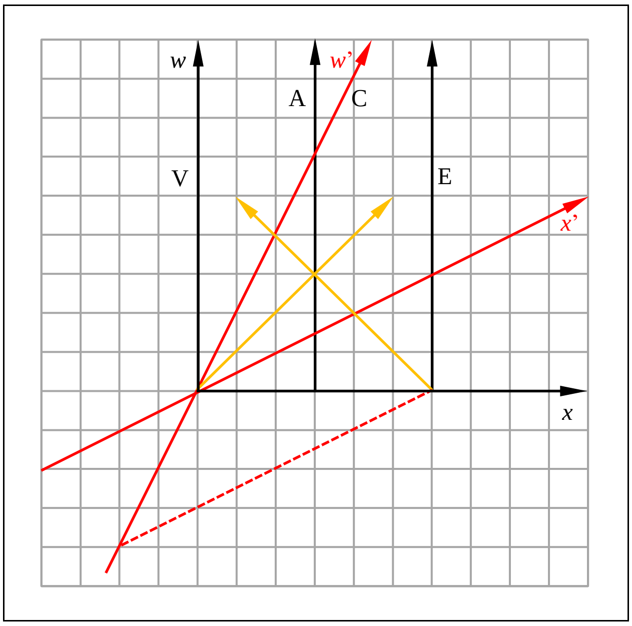
i Puk ziet de eerste twee fotonen afkomstig van de rotjes tegelijkertijd. De bron van die fotonen zijn de uiteinden van de trein. De afstanden die de fotonen moeten afleggen zijn identiek, want Puk staat precies in het midden van de trein. De lichtsnelheid is in alle richtingen hetzelfde, dus moet Puk concluderen dat de fotonen tegelijkertijd bij de rotjes vertrokken zijn en dus zijn de rotjes tegelijkertijd ontploft.

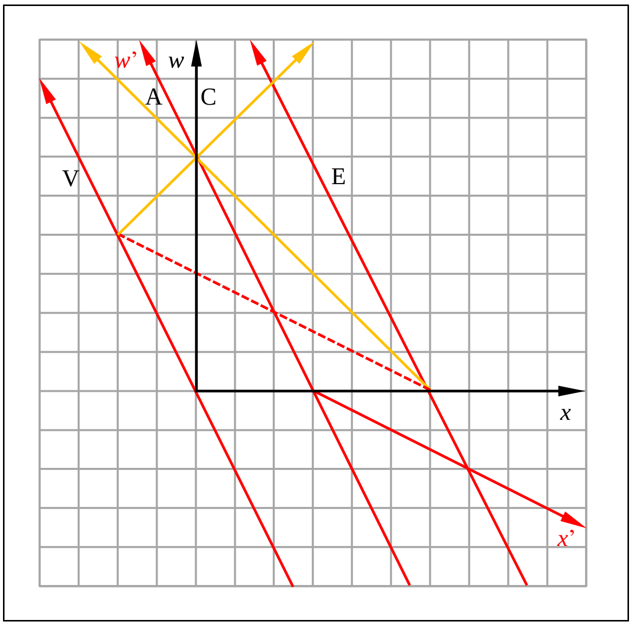
j We kunnen aflezen in het ruimtetijddiagram dat de fotonen van de achterkant Rens eerder bereiken dan de fotonen van de voorkant (Puk leest af



langs de rode stippellijnen evenwijdig aan de x'-as en Rens leest af langs horizontale lijnen evenwijdig aan de x-as, bijvoorbeeld de getekende zwarte stippellijn).
Wat betekent dit? De rotjes zijn nu tegelijkertijd ontploft in het stelsel van Puk. In het stelsel van Rens beweegt Puk met $v = 0{,}3 \cdot c$ naar rechts, maar volgens Puk staat zij stil en beweegt Rens met $v = 0{,}3 \cdot c$ naar links (zie de figuur hiernaast). Puk redeneert dat Rens naar de achterkant van de trein toe beweegt (de bron van de fotonen van het achterste rotje) en juist weg beweegt van de voorkant (de bron van de fotonen van het achterste rotje). De fotonen van het achterste rotje zullen Rens volgens Puk dus eerder bereiken dan de fotonen van het voorste rotje.
Als dit zo is voor Puk, moet dit ook zo zijn voor Rens. (Bedenk dat we ook een ghettoblaster neer kunnen zetten bij Puk, of dramatischer: een pistool dat afgaat als de lichtsignalen na elkaar bij Rens aankomen en niet afgaat als ze tegelijkertijd aankomen. Over de uitkomst 'ghettoblaster heeft gespeeld', of 'schot is gelost' moeten Rens en Puk het eens zijn). Rens moet dan alleen concluderen dat de rotjes in zijn stelsel niet tegelijkertijd zijn afgegaan. De afstanden van de brandvlekken op de rails (de golfbronnen) tot hem bewegen niet. Dus kan het lichtsignaal van de achterkant Rens alleen maar eerder bereiken als het achterste rotje eerder is ontploft dan het voorste rotje.
Twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn voor Puk zijn dat – hoe gek het ook klinkt – dus niet voor Rens. Gelijktijdigheid is relatief (hangt af van het coördinatenstelsel).

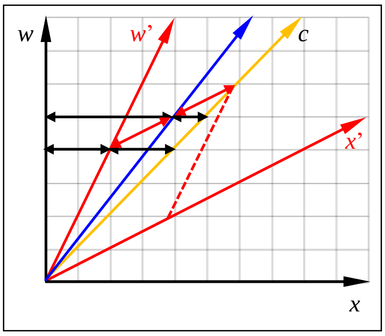
37a Zie de figuur hieronder links met de wereldlijnen van de Vesuvius (V), de Etna (E), waarnemer A en de raket (met $v = 0{,}5 \cdot c$), de x'-as van de raket en de wereldlijnen van twee fotonen.
Met een lijn evenwijdig aan de x'-as is te zien dat de gebeurtenis 'Etna barst uit' eerder plaatsvindt dan de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit'.
b Zie de figuur hieronder rechts.



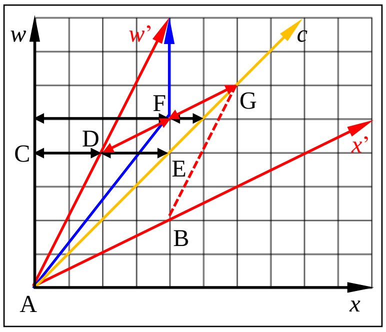


Relativistische snelheden optellen

38 In het zwarte stelsel: de snelheid van de trein is $0{,}5 \cdot c$, die van het meisje $0{,}8 \cdot c$.
In het rode stelsel (van de trein): de trein staat stil, het meisje heeft een snelheid van $0{,}5 \cdot c$, want de rode dubbele pijl tussen de rode en de blauwe



Figuur 50



Figuur 51

Formule
Voor het optellen van relativistische snelheden geldt in zijn algemeenheid de volgende formule:

snelheid A tov B	snelheid A tov C	snelheid C tov B

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}}$$

De snelheid *u* van A tov B is dus te berekenen met de snelheid *u*' van A tov C en de snelheid *v* van C tov B.

wereldlijn heeft een lengte die de helft is van de afstand die het licht in de overeenkomstige tijd in het rode stelsel aflegt (zie figuur 50).

39a CE is in het zwarte stelsel de afstand die het licht in 4 s aflegt.
b DE geeft in het zwarte stelsel aan hoeveel het licht meer aflegt dan de trein, in 4 s.
c AD geeft de tijdsduur (weer met *c* vermenigvuldigd) in het rode stelsel die overeenkomt met 4 s in het zwarte stelsel.
d Dit is de relatieve snelheidsparameter *v*/*c* van de trein in het zwarte stelsel.
e DG geeft de verplaatsing van het licht weer in het rode stelsel.
f Nee, dat is er niet: de verplaatsing van de trein in het stelsel van de trein zelf is altijd 0.
g AG is de wereldlijn van het foton. Deze lijn is onafhankelijk van het gekozen stelsel, dus in het rode en zwarte stelsel heeft AG dezelfde betekenis.
h Zie vraag **e**: het is de afstand die het licht aflegt in het rode stelsel.
i Omdat gegeven is dat in het rode stelsel het meisje met de halve lichtsnelheid vooruit rent.
j Zie figuur 51: ten opzichte van het zwarte stelsel staat zij nu stil, en haar wereldlijn loopt vanaf punt F verticaal.

Opgave 39
Leerlingen vinden deze opgave relatief moeilijk. Het kan helpen een vergelijking met een loopband te maken: kun je 'tegen de loopband in' lopen (in tegengestelde richting als de loopband gaat), zodat het lijkt of je stil staat ten opzichte van de grond?

40a Volgens Newton is de snelheid van de kogel 0,33·*c* + 0,5·*c* = 0,83·*c*.
De vluchtauto heeft een snelheid van 0,75·*c*. Dit is minder dan 0,83·*c*: de kogel kan de auto raken.
b Volgens Einstein is de snelheid *u* van de kogel ten opzichte van de grond als volgt te berekenen, met *u*' de snelheid van de kogel ten opzichte van de politie en *v* de snelheid van de politie ten opzichte van de grond (zie de formule voor het optellen van relativistische snelheden in het kader hiernaast):

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{0{,}333 \cdot c + 0{,}5 \cdot c}{1+\frac{0{,}333 \cdot c \times 0{,}5 \cdot c}{c^2}} = 0{,}71 \cdot c$$

De kogel kan de auto volgens Einstein dus niet inhalen, want de vluchtauto heeft een snelheid van 0,75·*c*.
c Zie de tabel hieronder. Opmerking: als de snelheid van A ten opzichte van B gegeven of berekend is, dan is ook de snelheid van B ten opzichte van A bekend: even groot, maar met tegengesteld teken.

snelheid van → ten opzichte van ↓	grond	politie	boeven	kogel	ontsnappen ze?
grond	0	0,5·*c*	0,75·*c*	0,71·*c*	ja
politie	–0,5·*c*	0	0,4·*c*	0,333·*c*	ja
boeven	–0,75·*c*	–0,4· *c*	0	–0,077·*c*	ja
kogel	–0,71·*c*	–0,333·*c*	0,077·c	0	ja

- De snelheid van de kogel ten opzichte van de grond is berekend in vraag **b**: 0,71·*c*.
- De snelheid *u* van de boeven ten opzichte van de politie is te berekenen met de gegeven snelheid *u*' van de boeven ten opzichte van de grond (0,75·*c*) en de gegeven snelheid *v* van de grond ten opzichte van de politie (– 0,5·*c*):

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{0{,}75 \cdot c - 0{,}5 \cdot c}{1-\frac{0{,}75 \cdot c \times 0{,}5 \cdot c}{c^2}} = 0{,}4 \cdot c$$

- De snelheid *u* van de kogel ten opzichte van de boeven is (onder andere) te berekenen met de gegeven snelheid u' van de kogel ten opzichte van de politie (0,333·c) en de berekende snelheid v van de politie ten opzichte van de boeven (–0,4·c):

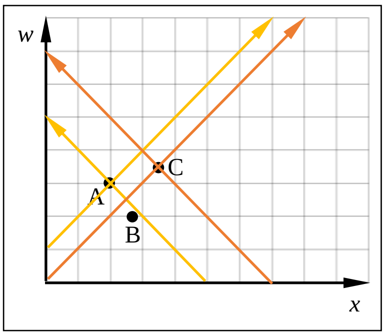
$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} = \frac{0{,}333\cdot c-0{,}4\cdot c}{1-\frac{0{,}333\cdot c\times 0{,}4\cdot c}{c^2}} = -0{,}077\cdot c$$

41a Als $u' << v$ is het product $u'\cdot v$ veel kleiner dan c^2 en is de breuk $u'\cdot v/c^2$ vrijwel gelijk aan nul:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} = \frac{u'+v}{1+0} = u' + v$$

b Als $v = c$ (voor het foton) geldt volgens de formule voor de snelheid u van het foton ten opzichte van de grond:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} = \frac{u'+c}{1+\frac{u'\cdot c}{c^2}} = \frac{u'+c}{1+\frac{u'}{c}} = \frac{u'+c}{\frac{c}{c}+\frac{u'}{c}} = \frac{u'+c}{\frac{c+u'}{c}} = (u'+c)\cdot\frac{c}{c+u'} = c$$

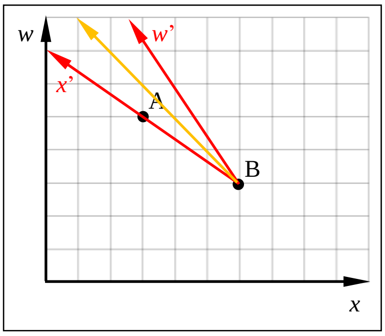


Figuur 54

42a Gebeurtenis B ligt binnen de achterwaartse lichtkegel van zowel A als C (zie figuur 54). B kan daarom A veroorzaakt hebben, en ook C. Gebeurtenis A valt buiten de lichtkegel van C, en is daarom niet causaal met C verbonden.

b Dit is de gebeurtenis in de toekomst die het snijpunt is van de gele en rode lijnen uit A en C.

c Nee, dat kan niet: alle punten binnen de voorwaartse lichtkegel vanuit A liggen ook binnen die vanuit B en zijn dus door B beïnvloedbaar.



Figuur 55

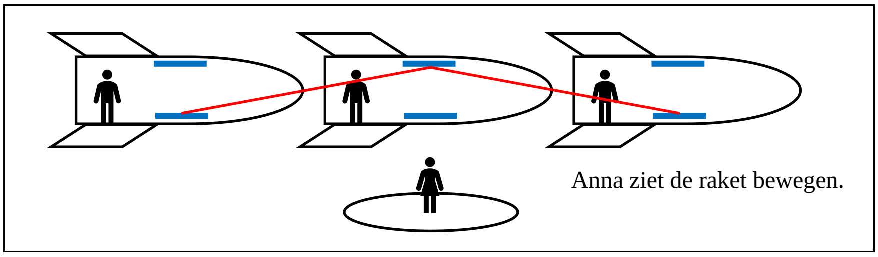
43a Zie figuur 55.

b De snelheid van dit stelsel is (kijk naar Δx = 3 hokjes naar links, Δt = 2 hokjes omhoog) $-^3/_2\cdot c = -1{,}5\cdot c$.

c Om A vanuit B te kunnen beïnvloeden, moet de grootte van de snelheid van het signaal (minstens) 1,5·c zijn. Dit kan niet, en dus kan er geen causaal verband tussen A en B bestaan.

Tijdrek

44a Zie figuur 57.

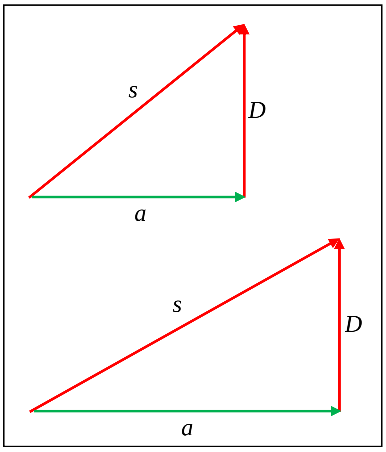


Figuur 57

b Anna meet een langere tijdsduur dan Cas (antwoord B):

$t_{Cas} = \frac{D}{c}$ en $t_{Anna} = \frac{s}{c}$ met $s > D \rightarrow t_{Anna} > t_{Cas}$.

c Zie figuur 60.



Figuur 60

d Afstand a wordt groter en afstand D blijft gelijk, dus afstand s wordt ook groter. Nog steeds geldt $t_{Cas} = D/c$ en $t_{Anna} = s/c$, dus het verschil in tijdsduur wordt (nog) groter.

e Voor Cas is D (en c) niet veranderd, dus ook zijn gemeten tijd niet.

f $D = c\cdot t_{raket}$

$s = c\cdot t_{aarde}$

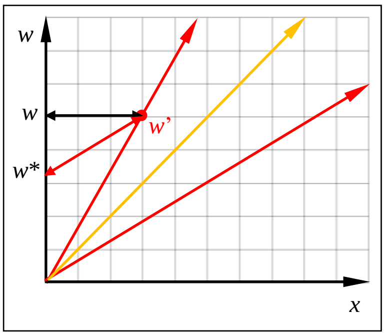
$a = v_{raket\ tov\ aarde}\cdot t_{aarde}$

45 Het contact is op de controletoren 139 s verbroken, zoals blijkt uit de volgende berekening:

$$t' = t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t \cdot \sqrt{1-\frac{(0{,}5 \cdot c)^2}{c^2}} = t \cdot \sqrt{1-0{,}5^2} = t \cdot 0{,}866 \rightarrow$$

$$t = \frac{t'}{0{,}866} = \frac{120}{0{,}866} = 139 \text{ s}$$

46a Als $v = c$ is v^2/c^2 gelijk aan 1 en heeft de factor de waarde 0.
b Als $v = 0$ is v^2/c^2 gelijk aan 0 en heeft de factor de waarde 1.
c $t \geq t'$



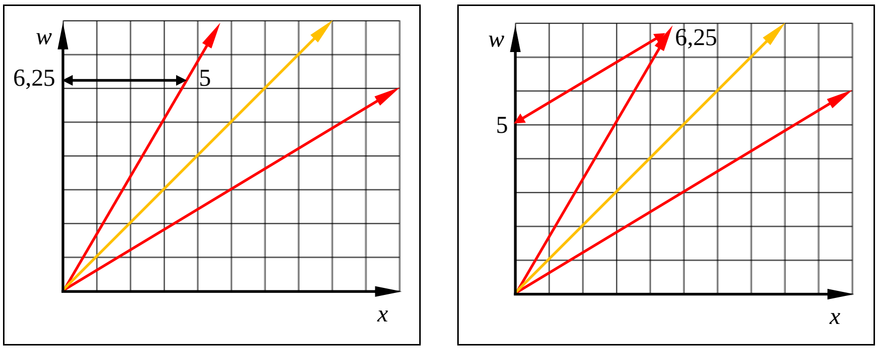
Figuur 61

47 Zie figuur 61.

48a Voor de rails (t) beweegt de trein (t'). In de trein is de radioactieve stof in rust. Daar is de halveringstijd dus 5 s. Dus $t' = 5$ s.

$$t' = t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 5 = t \cdot \sqrt{1-\frac{(0{,}6 \cdot c)^2}{c^2}} \rightarrow t = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25 \text{ s}$$

b Zie figuur 62 links.



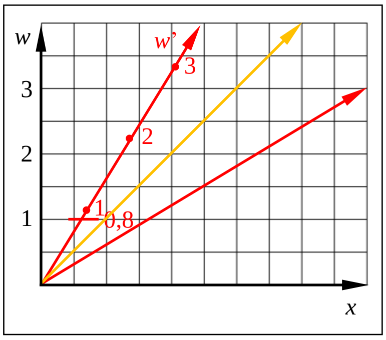
Figuur 62

c Voor de trein (t) beweegt de rails (t'). Langs de rails is de stof in rust. Daar is de halveringstijd dus 5 s. Dus $t' = 5$ s. De berekening is identiek aan die bij vraag **a** (dat moet ook volgens het relativiteitspostulaat): $t = 6{,}25$ s.
d Zie figuur 62 rechts.

49 Het zijn allemaal klokken. Biologische klokken zijn niet nauwkeurig (de hartslag bijvoorbeeld is niet constant), maar het zijn ook klokken.

50a Nee: jij staat ten opzichte van jezelf stil.
b Werkelijkheid.
c Dit zijn 11 signalen: 1 + 60/6.
d Ja: $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$ met $\sqrt{1 - v^2/c^2} \leq 1$, dus $t \geq t'$. De tijd tussen het ontvangen van twee opeenvolgende lichtsignalen is groter voor jou dan voor de zender: jij neemt daarom een kleinere frequentie waar.
e Nee: als je in de formule v door $-v$ vervangt, verandert de formule niet. Hier zorgt het kwadrateren voor.

51 Voor jou in het ruimteschip tikt tijd trager (ten opzichte van de aarde), maar niet ten opzichte van jezelf. Dus het zal gewoon 6 minuten duren. Iemand op aarde zal beweren dat er meer dan 6 minuten zijn verstreken.



Figuur 63

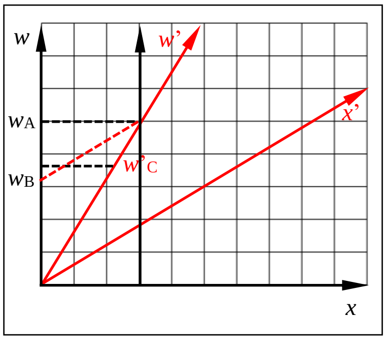
52a $w' = 0{,}8$ s
b Zie figuur 63.

53a De reistijd in het stelsel van Charlotte en Bob is $t = x/v = 4$ [ly]/0,8 [ly/y] = 5 jaar. Bob is dus 21+5 = 26 als Alice arriveert.
b Alice veroudert $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 5 \cdot \frac{3}{5} =$ 3 jaar: zij is 24 als ze bij Bob aankomt.
c Alice vertrekt als Bob (en Charlotte) 27 zijn. Na de reis van 5 jaar van Alice is Charlotte 32.

Alice veroudert in het jaar dat zij bij Bob blijft 1 jaar, en op de terugreis 3 jaar. Bij terugkomst is zij 24+1+3 = 28 jaar.

d Nee, dit is geen tegenspraak. We vergelijken waarden uit verschillende stelsels. In het zwarte stelsel doet het licht 4 jaar over de afstand, Alice 5 jaar. Alice gaat dus langzamer dan het licht. De tijdsduur van 3 jaar wordt gemeten door Alice. In haar stelsel doet het licht er geen 4 jaar over, ook zij meet de lichtsnelheid.
Opmerking: dit moet als consequentie hebben dat Alice de afstand als minder dan 4 lichtjaar ervaart.

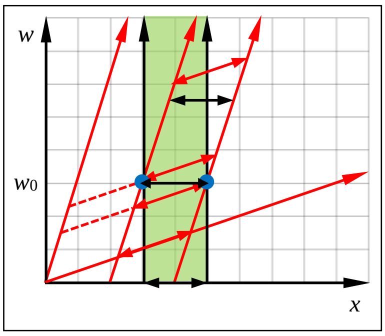
Opgave 53
Opgave 53 is te gebruiken als bruggetje naar lengtekrimp. Alice, Bob en Charlotte moeten het er over eens zijn dat Alice maar 3 jaar ouder is. Bob en Charlotte kunnen dit verklaren: bewegende klokken tikken trager. Maar Alice kan deze verklaring niet gebruiken: haar polshorloge heeft geen snelheid ten opzichte van haar en tikt gewoon normaal. Ook de relatieve snelheid van 0,8·*c* (planeet ten opzichte van Alice) is een vaststaand feit. Hoe kan zij die kortere tijdsduur dan toch verklaren? Er is maar één mogelijkheid: de afstand van 4 lichtjaar tussen de planeten is voor Alice kleiner dan 4 lichtjaar. Een kortere afstand leg je in een kortere tijdsduur af. Afstand of lengte is dus ook relatief (hangt af van de bewegingstoestand van de waarnemer), anders hebben we een logisch probleem. Dat bewegende lengtes krimpen is het onderwerp van het volgende onderdeel.



54a Zie de figuur hiernaast.
b/c Zie de figuur hiernaast.
d x = 3 lichtjaar; $v = {}^3/_5 = {}^3/_5$ lichtjaar/jaar.
$t = x/_v = 3/({}^3/_5) = 5$ jaar.
e $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 5 \cdot \frac{4}{5} =$ 4 jaar.
f $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4 \cdot \frac{4}{5} =$ 3,2 jaar.
g w'_C ligt op ¾ van het lijnstuk (0,0)-(5,3).
OF
Volgens de aarde (t) beweegt de raket en is er dus t' = 3 jaar verstreken in de raket: $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow 3 = t \cdot \frac{4}{5} \rightarrow t = 3{,}75$ jaar. Dan is w'_C te vinden door het tekenen van een gelijktijdigheidslijn evenwijdig aan de x-as.
OF
Volgens de raket beweegt de aarde (t') en is er dus t = 3 jaar verstreken in de raket: $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 3 \cdot \frac{4}{5} =$ 2,4 jaar. Dan is w'_C te vinden door het tekenen van een gelijktijdigheidslijn evenwijdig aan de x'-as.
h Leeftijd zus: 5 + 2 + 5 = 12 jaar. Jouw leeftijd: 4 + 2 + 4 = 10 jaar. Conclusie: jij 1 jaar jonger of zus 1 jaar ouder.

Lengtekrimp

55a Ja: de trein beweegt, dus een waarnemer langs de rails neemt de trein gekrompen waar in de bewegingsrichting. De tunnel staat stil voor de waarnemer langs de rails en krimpt dus niet. De trein paste al net in de tunnel toen de trein en de tunnel stil stonden. Nu de trein gekrompen is en de tunnel niet, past deze er zeker in.
b Nee: de tunnel en de waarnemer langs de rails zitten in hetzelfde stelsel.
c Voor de trein beweegt de tunnel, en krimpt de tunnel. De trein krimpt voor waarnemer in de trein niet, want de trein staat voor haar stil. De trein paste net in de tunnel bij stilstand. Nu de tunnel gekrompen is, past de trein niet meer in de tunnel volgens een waarnemer in de trein.
d Nee: krimp vindt altijd plaats in het andere stelsel.



Figuur 66

56a Zie de blauwe stippen in figuur 66.
b De gebeurtenis 'guillotine aan de achterkant slaat dicht' vindt plaats *voor* de gebeurtenis 'guillotine aan de voorkant slaat dicht' voor een waarnemer in de trein.

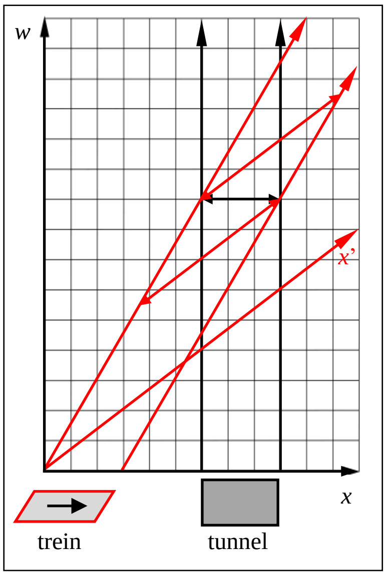
c De waarnemer langs de rails ziet de trein krimpen en de tunnel niet. Als de hakblokken vallen, is de trein volledig in de tunnel. Er steekt niets uit, de hakblokken gaan heel snel naar beneden en heel snel weer omhoog, dus de trein blijft heel.

d Voor de waarnemer in de trein valt het hakblok aan de voorkant van de tunnel, terwijl de voorkant van de trein de tunnel nog niet uit is. Als dit wel het geval is, is het hakblok alweer omhoog. Het hakblok aan de achterkant van de tunnel valt pas nadat de achterkant van de trein de tunnel al is ingegaan. Zo past de trein niet in de tunnel, maar doordat de waarnemer langs de rails de hakblokken bedient, redt de relativiteit van gelijktijdigheid de trein.

Opgave 55/56

De opgaven 55 en 56 illustreren het lengtekrimpeffect door middel van de paradox die zich voordoet als we willen weten of een trein in een tunnel past. Deze paradox betreft een situatie met een stilstaande tunnel en een trein die er met grote snelheid doorheen raast. De stilstaande waarnemer ziet een gekrompen versie van de trein, die volgens hem precies in de tunnel past. Voor de waarnemer in de trein is juist de tunnel gekrompen en de trein niet, dus volgens haar past de trein met geen mogelijkheid in de tunnel. Hoe bepalen we wie er gelijk heeft? Past die trein er nou wel of niet in?
We kunnen de situatie iets dramatischer maken door twee guillotines te introduceren die tegelijkertijd neervallen aan de voor- en achterkant van de tunnel. In het railsstelsel blijft de trein heel, en in het treinstelsel wordt de voor- en achterkant van de trein gehakt! De waarnemer langs de rails kan samen met de waarnemer in de trein (nadat ze is uitgestapt) controleren wat de staat van de trein is. Iedereen moet het er over eens zijn of de trein heel blijft of niet.
Uit het gegeven ruimtetijddiagram wordt eigenlijk meteen duidelijk hoe de paradox ontstaat. In het zwarte stelsel worden afstanden per definitie gemeten langs de horizontale zwarte lijnen. We zien dat de trein in dat geval precies in de tunnel past: op het tijdstip $w = w_0$ vallen de beide uiteinden van de trein net binnen de tunnel. Maar voor de rode waarnemer voltrekt zich een heel ander schouwspel: op het moment dat het voorste uiteinde van de trein bij de achterkant van de tunnel aankomt, bevindt het andere uiteinde ervan zich nog buiten de tunnel. De bewegende waarnemer concludeert dus terecht dat de trein niet in de tunnel past. Waar het om draait is het feit dat bij een lengtemeting per definitie het begrip ‘gelijktijdigheid’ betrokken is. Omdat gelijktijdigheid afhankelijk is van het stelsel van de waarnemer, geldt dat ook voor elke uitspraak over de verhouding tussen de lengte van voorwerpen die zich met verschillende snelheden voortbewegen.
Het antwoord op de vraag ‘Past de trein in de tunnel of niet?’ luidt dus: ‘Dat hangt ervan af.’ Niet alleen van de trein, maar ook van de waarnemer. De zwarte en rode waarnemers spraken allebei de waarheid… tenminste, hun waarheid. Bij de treinparadox hebben beide waarnemers gelijk. De paradox berust erop dat wij gewend zijn uitspraken te doen die in alle omstandigheden gelden. Bij lage snelheden (uit het dagelijks leven) komen we hierdoor niet in problemen. Juist daarom houden we dan ook geen rekening met veranderingen die het gevolg zijn van grote onderlinge snelheden.

57 B



Figuur 67

58a Zie figuur 67: de twee zwarte wereldlijnen van de voor- en achterkant van de tunnel.

b Zie figuur 67: de twee rode wereldlijnen van de voor- en achterkant van de trein, en de (eendimensionale) trein op $w = 9$ s (de horizontale zwarte dubbele pijl). Deze past in de tunnel.

c Zie figuur 67: de x'-as van de trein en de (eendimensionale) trein (de rode dubbele pijlen evenwijdig aan de x'-as) als de voorkant van de trein de tunnel uit gaat (onderste pijl) en als de achterkant van de trein de tunnel in gaat (bovenste pijl). Gemeten langs de x'-as kunnen de voor- en achterkant van de trein dus nooit gelijktijdig in de tunnel zijn.

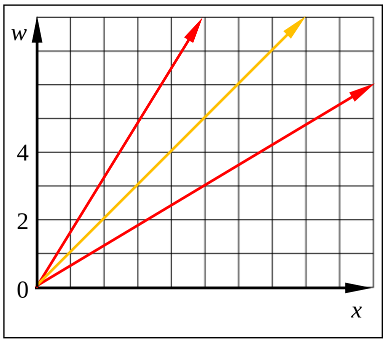
59a De liniaal is ten opzichte van jou in rust, en daarom meet je gewoon 30 cm.

b $L = L' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow 20 = 30 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow v = 0{,}75 \cdot c$

60a $t = x/v$ = 12 [ly]/0,6 [ly/y] = 20 jaar.

b $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 20 \cdot \frac{4}{5} =$ 16 jaar.

c $L = L' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 12 \cdot \frac{4}{5} = 9{,}6$ lichtjaar.
d $t = x/v$ = 9,6 [ly]/0,6 [ly/y] = 16 jaar.
e Volgens jou zal Albert een kortere tijd meten omdat zijn klok langzamer loopt dan die van jou. Volgens Albert is er niets met zijn klok aan de hand, en zal hij een kortere tijd dan jij meten omdat de afstand verkort is.

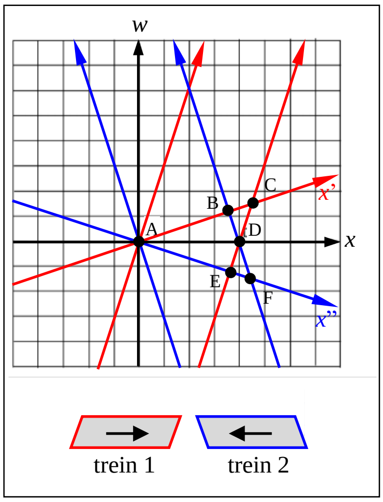


Figuur 68

61a Zie figuur 68.
b Op t = 5 bevindt Bob zich op $x(5)$ = 0,6·5 = 3.
c De klok van Bob is vertraagd. De aanwijzing van zijn klok is daarom:
$t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$
d $x'(4) = v{\cdot}t' = -0{,}6{\cdot}4 = -2{,}4$. Het minteken is nodig omdat Alice de andere kant op beweegt dan Bob.
e Bob en Alice hebben hun eigen, van elkaar verschillende klok. Zij zijn het niet eens over het tijdstip waarop de afgelegde wegen worden berekend (zie vraag **b** en **c**). Zij zijn het dan ook niet eens over de tijdsduur waarin de ander heeft bewogen: volgens Alice bewoog Bob 5 s en volgens Bob bewoog Alice 4 s. Omdat ze het wel eens zijn over hun relatieve snelheid, moet dat inhouden dat ze het ook oneens zullen zijn over de verplaatsingen. Daarom kan Alice vinden dat Bob een afstand van 3 heeft afgelegd, terwijl Bob vindt dat Alice 2,4 heeft afgelegd.

62a De raket is ten opzichte van de bemanningsleden in rust, dus de lengte van de raket is voor hen 100 m.
b $L = L' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60$ m.
c De bemanningsleden snijden 100 m af langs een voor hen gekrompen meetlat. Ze snijden dus een lengte af die langer is dan 100 m in het meetlatstelsel:
$L = L' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow 100 = L' \cdot \frac{3}{5} \rightarrow L' = 167$ m.

Opgave 62
De vragen a en b van opgave 62 gaan over het algemeen goed, maar vraag c niet. Slechts een enkeling geeft een correct antwoord. De raketbemanning gaat 100 m afsnijden, maar dit doen zij langs een voor hen gekrompen meetlat. Ze snijden dus een lengte af die langer is dan 100 m in het meetlatstelsel (167 m). De meeste leerlingen stellen dat lengte van het ruimteschop alleen maar wordt waargenomen als 60 m, maar deze *eigenlijk* 100 m is. Lengtekrimp wordt gezien als een illusie.



Figuur 69

63a Zie figuur 69: rood voor trein 1 en blauw voor trein 2.
bc Zie figuur 69: rood voor x'-as trein 1 en blauw voor x''-as trein 2.
de Zie figuur 69: AC voor trein 1 en AB voor trein 2.
f De in het stelsel van trein 1 bewegende trein 2 is korter: AB < AC.
gh Zie figuur 69: AF voor trein 2 en AE voor trein 1.
i De in het stelsel van trein 2 bewegende trein 1 is korter: AE < AF.

Lorentztransformaties
Er zullen leraren zijn die geneigd zijn in een van de eerste lessen de lorentztransformaties te gaan gebruiken in de klas. De afleiding zal (zoals bij meer afleidingen) aan de meeste leerlingen voorbij gaan. Bedenk ook dat een vergelijking voor ons veel waarde en betekenis heeft – een getraind oog kijkt heel anders naar een formule – maar een leerling ziet dit:
$$x' = \frac{x - Je}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{y^2}}}$$
De speciale relativiteitstheorie vraagt van leerlingen een heftige oefening in logisch redeneren, waarbij vele begrippen uit het dagelijks leven opnieuw onder de loep genomen moeten worden. Lestijd kun je maar een keer uitgeven. Men kan investeren in diepgang en begrip van het relativiteitspostulaat, gelijktijdigheid, tijdrek en lengtekrimp of men kan drie of meer lessen besteden aan het manipuleren van vergelijkingen. Zelfs als leerlingen de lorentztransformaties kunnen toepassen, zegt dit nog niet automatisch iets over het begrip van de concepten achter die vergelijkingen. Welke keuze gedaan wordt, is aan de leraar.

Ook volgens Ogborn (2005) zijn leerlingen behoorlijk enthousiast wanneer ze de relativiteitstheorie leren. Veel leerlingen verliezen dit enthousiasme als ze geconfronteerd worden met de lorentztransformaties.

Ogborn, J. (2005). Introducing Relativity: less may be more. *Physics Education 40*(3), 213-222.

2 Bronnen

De tabel hieronder geeft de verwijzingen naar de (inspiratie)bronnen voor de opgaven, gevolgd door de bronnenlijst.

Verwijzingen

Opgave	Verwijzing
1	Bais & Rijkenberg (2010)
2	Bais & Rijkenberg (2010)
3	Bais & Rijkenberg (2010)
4	Bais & Rijkenberg (2010), aangepast
5	Bais & Rijkenberg (2010)
6	Bais & Rijkenberg (2010)
7	Bais & Rijkenberg (2010)
8	Bais & Rijkenberg (2010)
9	Geïnspireerd op Knight (2008)
10	Takeuchi (2010)
11	Geïnspireerd op Saltiel (1980)
12	Bais & Rijkenberg (2010)
13	Hewitt, Conceptual Physics (web)
14	Bais & Rijkenberg (2010)
15	
16	Ramadas, Barve & Kumar (1996)
17	Scherr (2001)
18	Scherr (2001)
19	Scherr (2001)
20	Scherr (2001)
21	Scherr (2001)
22	Scherr (2001)
23	Scherr (2001)
24	Scherr (2001)
25	Scherr (2001)
26	Geïnspireerd op Scherr (2001)
27	
28	Bais & Rijkenberg (2010)
29	Griffiths (1999)
30	Bais & Rijkenberg (2010)
31	Bais & Rijkenberg (2010)
32	Bais & Rijkenberg (2010)
33	Bais & Rijkenberg (2010)
34	Takeuchi (2010)
35	Takeuchi (2010)
36	
37	Geïnspireerd op Scherr (2001)
38	Bais & Rijkenberg (2010)
39	Bais & Rijkenberg (2010)
40	Griffiths (1999)
41	Bais & Rijkenberg (2010)
42	Bais & Rijkenberg (2010)
43	Bais & Rijkenberg (2010)

44	
45	Bais & Rijkenberg (2010)
46	
47	Geïnspireerd op Bais & Rijkenberg (2010)
48	Geïnspireerd op Bais & Rijkenberg (2010)
49	Geïnspireerd op Styer (2011)
50	Bais & Rijkenberg (2010)
51	Hewitt & Wolf (2005)
52	Bais & Rijkenberg (2010)
53	Bais & Rijkenberg (2010)
54	De Wit (2015)
55	Geïnspireerd op Sixty Symbols (2013)
56	Geïnspireerd op Sixty Symbols (2013) en Bais & Rijkenberg (2010)
57	Moore (2002)
58	Takeuchi (2010)
59	Bais & Rijkenberg (2010)
60	Geïnspireerd op Hewitt & Wolf (2005)
61	Bais & Rijkenberg (2010)
62	Gibson (2008)
63	Geïnspireerd op Takeuchi (2010)

Bronnenlijst

Bais, S. & Rijkenberg, B. (2010). *Relativiteit*. Enschede: Stichting natuurkunde.nl.

De Wit, G. (2014). Meesterproef ter behaling van de eerstegraads lesbevoegdheid natuurkunde aan de VU.

Gibson, K. (2008). *Special Relativity in the Classroom* (Proefschrift, Arizona State University, Tempe). Geraadpleegd op 18 maart 2016.

Griffiths, D.J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall.

Hewitt, P.G. & Wolf, P.R. (2005). *Problem Solving in Conceptual Physics for Conceptual Physics* (10th Edition). San Fransico: Addison Wesley.

Knight, R.D (2008). *Instructor Guide for Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics* (3rd Edition). Geraadpleegd op 18 maart 2016.

Moore, T. (2002). *Six Ideas That Shaped Physics: Unit R - Laws of Physics are Frame-Independent* (2nd Edition). Columbus, OH: McGraw-Hill.

Ramadas, J., Barve, S. & Kumar, A. (1996). Alternative conceptions in Galilean relativity, Distance, time, energy and laws. *International Journal of Science Education 18*(4), 463-477.

Saltiel, E. (1980). Spontaneous ways of reasoning in elementary kinematics. *European Journal of Physics 1*(2), 73-80.

Scherr, R.E. (2001). *An Investigation of Student Understanding of Basic Concepts in Special Relativity*. Washington: University of Washington.

Sixty Symbols. (2013, 4 maart). *Relativity Paradox – Sixty Symbols* [videobestand]. Geraadpleegd op 2 mei 2017.

Styer, D.F. (2011). *Relativity for the Questioning Mind*. Baltimore MD: John Hopkins University Press.

Takeuchi, T. (2010). *An Illustrated Guide to Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.