

Bij 4.3 Wiskunde in natuurkunde

Transfer vanuit wis- naar natuurkunde

Süleyman Turşucu

De relatie tussen wiskunde en natuurwetenschappen is innig. De bekende natuurkundige Eugene Wigner beschreef de effectiviteit van wiskunde in de natuurwetenschappen, en natuurkunde in het bijzonder, als “*onredelijk effectief*” (Wigner, 1960). Hij merkte op dat abstracte wiskundige concepten vaak onverwacht bruikbaar blijken in de natuurkunde. Volgens Wigner lijkt dit te suggereren dat er een ‘mysterieuze en onverklaarbare’ relatie bestaat tussen wiskunde en de fysieke werkelijkheid. Deze intrinsieke relatie vormt de basis voor het toepassen van wiskunde binnen de natuurkunde (e.g. Redish, 2021a; 2021b).

Deze diepe verbinding tussen wis- en natuurkunde manifesteert zich niet alleen in abstracte theorieën, maar ook in de manier waarop wiskunde wordt toegepast om natuurverschijnselen te begrijpen en te beschrijven. In het onderwijs en onderzoek wordt deze relatie op verschillende manieren zichtbaar. Wiskunde biedt natuurkunde krachtige hulpmiddelen om kwantitatieve relaties te representeren, te modelleren, berekeningen uit te voeren en voorspellingen te doen over natuurverschijnselen (e.g. Dierdorp et al., 2014). Omgekeerd biedt natuurkunde rijke en relevante contexten waarin die wiskunde kan worden toegepast. Zo wordt bijvoorbeeld het gedrag van een bal als functie van de tijd beschreven door de natuurkundeformule in uitdrukking (1):

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

Hierbij staan de symbolen voor de volgende grootheden: $y(t)$ voor de positie van de bal op tijdstip t , y_0 voor de beginpositie van de bal, v_0 voor de beginsnelheid van de bal en g voor de zwaartekrachtsversnelling. Hiermee wordt een wiskundig model gebruikt om natuurkundige begrippen, grootheden en constanten te beschrijven en te analyseren. Dergelijke toepassingen laten zien hoe wiskunde niet alleen abstracte problemen oplost, maar ook essentieel is voor het begrijpen en beschrijven van reële fysieke fenomenen.

Gebrek aan transfer tussen natuur- en wiskunde

Hoewel wis- en natuurkunde nauw met elkaar verbonden zijn, blijkt de transfer van wiskundige kennis en vaardigheden naar natuurkunde vaak problematisch (e.g. Badmus & Jita, 2024; Retnawati et al., 2018). Dit probleem doet zich voor in verschillende lagen van het onderwijs. In deze paragraaf richten we ons op het voortgezet onderwijs, omdat juist in deze fase de fundamentele van zowel wis- als natuurkunde worden gelegd. De uitdagingen met transfer worden in deze onderwijsfase voor het eerst duidelijk zichtbaar en benadrukken het belang van expliciete verbindingen tussen beide vakken.

In het ideale geval kunnen docenten de samenhang tussen beide vakken efficiënt benadrukken door bijvoorbeeld een korte hint te geven, zoals: “Dit lijkt op wat je bij wiskunde hebt geleerd”. Zulke hints kunnen leerlingen helpen om verbanden te zien tussen de vakken, zonder dat docenten uitvoerig op wiskundige concepten en oplossingsstrategieën hoeven in te gaan. Dergelijke verwijzingen naar eerder geleerde stof kunnen het transferproces ondersteunen,

vooral wanneer deze herhaaldelijk en in verschillende contexten worden toegepast. Het leggen van deze koppeling blijkt in de praktijk dus vaak moeilijk te realiseren.

Een bekend voorbeeld is dat leerlingen bij natuurkunde problemen ervaren met het toepassen van goniometrische relaties. Dit soort relaties is belangrijk bij het onderwerp krachten waar regelmatig wordt gewerkt met de rechthoekige driehoek. In het volgende voorbeeld maken we het gebrek aan transfer concreter. Een bovenbouwleerling van het vwo blijkt tijdens het eerste lesuur in de wiskundeles zonder moeite een vergelijking zoals $y = bx^2$ te kunnen oplossen voor x : $x = \sqrt{\frac{y}{b}}$ (Turşucu, 2021). Later op de dag, in de natuurkundeles, heeft diezelfde leerling veel moeite om de soortgelijke uitdrukking $s = \frac{1}{2}at^2$ te herkennen, laat staan op te lossen voor t : $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$. Als de natuurkundeleraar uitlegt dat er een verband is tussen beide uitdrukkingen, reageert de leerling: “*Dat hebben we nooit gehad bij wiskunde, meneer!*” (p.19).

Het gevolg hiervan is dat natuurkundeleraars vaak opnieuw wiskunde moeten uitleggen. Dit kan frustrerend en tijdrovend zijn en ten koste gaan van de lestijd voor natuurkunde. De overladenheid van eindexamenprogramma's kunnen er bovendien aan bijdragen dat leraren hun lesstof in een nog kortere tijd moeten behandelen. Deze omstandigheden vergroten de kloof tussen beide vakken, waardoor de transfer nog moeilijker kan worden.

Factoren die de transfer beïnvloeden

Er zijn meerdere factoren die de transfer van wis- naar natuurkunde beïnvloeden, zoals het gebrek aan expliciete aansluiting tussen beide eindexamenprogramma's. Beide schoolvakken hebben afzonderlijke doelen en missen afstemming die leerlingen helpt wiskunde effectief in natuurkundige contexten toe te passen. In het stuk hieronder ligt de focus echter specifiek op de vier kernfactoren gecompartmenteerd denken, docentenopvattingen, verschil in didactiek en wiskundige bekwaamheid (Turşucu, 2019). Deze factoren spelen ook een belangrijke rol in andere typen onderwijs, zoals het hoger onderwijs en het beroepsonderwijs.

Bij gecompartmenteerd denken ervaren leerlingen een sterke scheiding tussen wis- en natuurkunde, waardoor zij kennis en vaardigheden uit de wiskunde als losstaand van natuurkunde beschouwen. Dit hokjesdenken ligt in belangrijke mate ten grondslag aan het voorbeeld in het eerdere stuk, waarbij de leerling in de wiskundeles probleemloos een wiskundevergelijking oplost, maar later, in de natuurkundeles, een uitdrukking met een soortgelijke structuur niet herkent.

Bij docentenopvattingen spelen de naïeve opvattingen van zowel wis- als natuurkundeleraars een rol bij de transfer van wiskunde naar natuurkunde. Een deel van de leraren gaat er namelijk vanuit dat leerlingen automatisch wiskunde zullen toepassen bij natuurkunde, zonder dat daar extra ondersteuning voor nodig is. In de praktijk blijkt echter dat leerlingen zonder expliciete begeleiding vaak moeite hebben met deze transfer. Hiermee is er een discrepantie tussen de verwachtingen van leraren en de realiteit in het klaslokaal.

Ook verschil in didactiek kan transfer beïnvloeden. Wiskunde- en natuurkundeleraars hanteren vaak verschillende didactische benaderingen. Een voorbeeld hiervan is een natuurkundeleraar die de nadruk legt op het toepassen van wiskunde met inzicht, terwijl de wiskundeleraar gebruikmaakt van ad-hocstrategieën ('trucjes'). Denk aan het gebruik van de formuledriehoek en kruislings vermenigvuldigen. Deze didactische benaderingen worden vaak beïnvloed door het lesmateriaal. In Nederland vormt de lesmethode een brug tussen het examenprogramma en de onderwijspraktijk. Nederlandse leraren volgen daarom trouw het

lesmateriaal en geven de inhoud hiervan door aan hun leerlingen, inclusief ad-hocstrategieën. Het risico hiervan is dat dergelijke strategieën alleen werken voor specifieke situaties, wat kan leiden tot gefragmenteerde kennis. Dit beperkt de mogelijkheden voor generalisatie van wiskunde. Bij opgaven die meer inzicht vereisen, kunnen leerlingen vastlopen. Daarnaast kan het verschil in didactiek verwarrend zijn voor leerlingen en de transfer belemmeren.

Ten slotte is wiskundige bekwaamheid van leerlingen een cruciale factor als het gaat om het effectief toepassen van wiskunde (Roorda, 2012). Deze bekwaamheid bestaat uit vijf verweven competenties: adaptief redeneren, strategisch competent zijn, conceptueel begrijpen (inzicht), een productieve houding hebben en procedureel vloeiend werken, of procedureel werken in het kort. Hieronder worden deze factoren toegelicht.

Adaptief redeneren verwijst naar het vermogen van leerlingen om logisch na te denken, te reflecteren, uitleg te geven en verantwoording te bieden. Dit stelt hen in staat om wiskundige concepten flexibel toe te passen in verschillende situaties, zoals het interpreteren van krachtenvectoren op een helling en het bepalen welke componenten bijdragen aan beweging langs de helling. Strategisch competent zijn helpt leerlingen bij het formuleren, representeren en oplossen van problemen, zoals het vertalen van een complexe natuurkundige situatie naar een wiskundig model dat de situatie vereenvoudigt en analyse mogelijk maakt. Hoewel dit soort probleemoplossende vaardigheden vaak nodig zijn in complexe natuurkundige situaties, komt het vertalen naar wiskundige modellen in deze vorm niet veel voor in het voortgezet onderwijs. Conceptueel begrijpen biedt inzicht in de onderliggende wiskundige concepten, operaties en relaties, wat bijvoorbeeld essentieel is bij het werken met natuurkundeformules. Een productieve houding hebben, betekent dat leerlingen wiskunde als zinvol, nuttig en waardevol beschouwen, en het vertrouwen hebben dat doorzettingsvermogen succes zal brengen in het toepassen van hun wiskundige kennis. Dit kan bijvoorbeeld tot uiting komen wanneer een leerling zich vastbijt in een uitdagend natuurkundevraagstuk over energiebehoud, omdat de leerling gelooft dat de oplossing binnen bereik ligt door logisch redeneren en systematisch werken. Tot slot stelt procedureel werken leerlingen in staat om wiskundige berekeningen flexibel, nauwkeurig, efficiënt en op gepaste wijze uit te voeren.

Verbeteren van transfer

Een oplossing voor het gebrek aan transfer tussen wis- en natuurkunde en andere exacte vakken, is samenhangend bètaonderwijs (Turşucu, 2019). Evenals bij STEM-onderwijs, waarbij STEM staat voor science, technology, engineering, en mathematics (Dominguez et al., 2023), staat bij dit type onderwijs wiskunde centraal. Dit hangt samen met de unificerende rol van wiskunde: soortgelijke uitdrukkingen die in verschillende contexten buiten de wiskunde worden gebruikt, kunnen worden herleid tot dezelfde abstracte wiskunde. Zo leren leerlingen in de wiskundeles werken met algebraïsche vergelijkingen, die vervolgens in natuurkundeformules kunnen worden toegepast om fysieke verschijnselen te beschrijven.

Samenhangend bètaonderwijs is bovendien inherent verbonden met het traditionele transfer paradigma: de initiële leersituatie, wiskunde, wordt toegepast in nieuwe leersituaties, in dit geval andere exacte vakken en natuurkunde in het bijzonder.

Het doel van samenhangend bètaonderwijs is om vakken met elkaar te verbinden door aspecten zoals notaties, conceptbeschrijvingen, didactische benaderingen en de organisatie van het leerproces op elkaar af te stemmen om een logische leerlijn tussen beide vakken te waarborgen. Dit vereist dat bepaalde wiskundige kennis en vaardigheden worden onderwezen in de wiskundeles voordat ze bij natuurkunde worden gebruikt.

Algebraïsche problemen bij natuurkunde

Wiskunde wordt op verschillende manieren toegepast in de natuurkunde. Hieronder ligt de focus op het toepassen van algebraïsche vaardigheden, waarbij zowel basisvaardigheden als inzicht in de onderliggende wiskunde wordt benadrukt. Deze vaardigheden zijn essentieel voor het oplossen van algebraïsche problemen in de natuurkunde. Het gaat bijvoorbeeld om het werken met natuurkundeformules, zoals het isoleren van grootheden en het uitvoeren van dimensie-analyses om de juiste eenheden van formules te bepalen. Het toepassen van deze vaardigheden binnen de natuurkunde blijkt echter vaak problematisch, zoals eerder besproken.

Uit de interventiestudie van [Turşucu et al. \(2020\)](#) blijkt dat een gestructureerde aanpak en gerichte begeleiding nodig zijn om de transfer van algebraïsche vaardigheden bij natuurkunde te verbeteren. In deze studie maakten drie leerlingen drie opdrachten over algebraïsche problemen bij natuurkunde. In de eerste ronde werkten zij aan opdrachten zoals deze voorkwamen in de natuurkundemethode (Ottink et al., 2014). Twee weken later, in de tweede ronde, kregen de leerlingen dezelfde opgaven opnieuw, ditmaal ondersteund door een duidelijk stappenplan met strategische (neutrale) hints. Deze hints gaven gerichte aanwijzingen die de leerlingen hielpen bij het oplossen van de opdrachten zonder direct het antwoord te onthullen. Hieronder staat die interventie voor opdracht 1, waarbij de leerlingen werd gevraagd om de eenheid van c te bepalen in de natuurkundeformule $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$. Hierbij staat Q voor de hoeveelheid warmte in J, m voor de massa van het voorwerp in kg, c voor de soortelijke warmte in $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ en ΔT voor de temperatuurverandering in K.

- (1) strategische hint 1: los eerst op voor c ;
- (2) activeren van voorkennis: bij wiskunde heb je geleerd dat wanneer $y = a \cdot b$, en je wilt oplossen voor $a = \dots$, dan moet je b aan de andere kant wegdelven. Dit kun je doen door beide kanten te delen door b . Dus, $\frac{y}{b} = \frac{a \cdot b}{b}$ en omdat $\frac{ab}{a} = 1$, geeft dit $a = \frac{y}{b}$;
- (3) strategische hint 2: gebruik de eenheidsoperator $[c] = \dots$.

Bij de stappen één en twee worden leerlingen getriggerd om de balansmethode te gebruiken ([Vlassis, 2002](#)). Hierbij wordt bij een algebraïsche uitdrukking aan beide zijden van het gelijkteken dezelfde bewerking uitgevoerd om de balans of gelijkheid van de uitdrukking te behouden. Het gebruik van deze methode helpt leerlingen standaard wiskunderegels vanuit het voortgezet onderwijs met inzicht toe te passen in plaats van terug te vallen op ‘trucjes’.

Lina's oplossingen voor opdracht 1

Figuur 1 geeft Lina's oplossingen voor opdracht 1 in beide ronden. In de eerste ronde gebruikt Lina de ad-hocstrategie nummeren waarbij ze eenheden van de formule vervangt door getallen, de berekening uitvoert en vervolgens de getallen weer door eenheden vervangt om tot haar antwoord te komen. In de tweede ronde past Lina een meer gestructureerde aanpak toe. Ze past correct de balansmethode toe en deelt beide zijden van de formule door door $m \cdot \Delta T$ om c vrij te maken. Dit toont aan dat zij inzicht heeft in de onderliggende wiskunde bij het toepassen van algebraïsche vaardigheden. Vervolgens vult ze aan de rechterkant van $[c]$ de juiste eenheden in voor de correcte oplossing.

$J = \text{kg} \cdot ? \cdot ^\circ\text{C}$ $c = \frac{J}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $2 = \frac{8}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$	$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ $\frac{Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{m \cdot \Delta T}$ $c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$ $[c] = \frac{J}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$
Ronde 1	Ronde 2

Figuur 1. Lina's oplossingen voor opdracht 1 in beide ronden

Algemene bevindingen interventiestudie

De interventiestudie (Turşucu et al., 2020) laat zien dat een duidelijk stappenplan, ondersteund door strategische hints, een aanzienlijke bijdrage levert aan het verbeteren van wiskundige vaardigheden binnen natuurkundige contexten. Leerlingen blijken na de interventie beter in staat om natuurkundeformules te herschrijven en voeren ook vaker correcte dimensie-analyses uit bij grootheden. Deze vaardigheden zijn essentieel binnen het natuurkunde-examenprogramma (SLO, 2024). Een treffende reactie van een leerling, "Nu begrijp ik waarom we die wiskunde leren!", illustreert hoe deze aanpak leerlingen helpt om meer inzicht te krijgen in het toepassen van algebraïsche vaardigheden in natuurkundige contexten, en tegelijkertijd hun zelfvertrouwen vergroot.

Succesfactoren en implicaties voor de onderwijspraktijk

Drie factoren vormen de basis voor het succes van de interventie en bieden een praktische leidraad voor implementatie in het klaslokaal:

- gerichte eenvoud: door de interventie beperkt te houden en specifieke doelen te formuleren, zoals het isoleren van grootheden en het bepalen van eenheden, kunnen leerlingen zich concentreren op kernvaardigheden zonder afgeleid te worden door overbodige complexiteit;
- activeren van voorkennis: door expliciet te verwijzen naar wiskundige vaardigheden, wordt een consistente aanpak gehanteerd die de samenhang en transfer tussen beide vakken versterkt. Dit is vooral relevant voor de transfer van algebraïsche vaardigheden, waarbij leerlingen leren hoe zij hun kennis van wiskunderegels en bewerkingen effectief kunnen toepassen in natuurkundeformules;
- strategische hints: deze bieden een systematische aanpak waarmee leerlingen problemen oplossen met inzicht in de onderliggende wiskunde, zonder het antwoord te geven. Door de balansmethode te gebruiken, ontwikkelen leerlingen een beter begrip van hoe zij algebraïsche vaardigheden kunnen inzetten om algebraïsche natuurkundeproblemen op te lossen.

Om de transfer van algebraïsche vaardigheden te versterken, is het belangrijk dat natuurkundeleraars interventies gebruiken die aansluiten bij de didactiek van het wiskundeonderwijs. Ad-hocstrategieën, zoals formule-driehoeken, moeten zoveel mogelijk worden vermeden. Het gevaar hiervan is dat het alleen werkt voor een specifiek geval. Dit kan leiden tot gefragmenteerde kennis, waardoor generalisatie van de wiskunde en in het bijzonder van algebra wordt beperkt. In opgaven waarbij inzicht nodig is, kunnen leerlingen hierdoor vastlopen. Bovendien kunnen discrepanties in didactische benaderingen nogal verwarrend zijn en de transfer in de weg staan.

In het streven naar samenhangend bètaonderwijs is het essentieel om een gedeelde focus te leggen op zowel basisvaardigheden als inzicht (conceptueel begrijpen) in de onderliggende wiskunde. Hierdoor worden leerlingen beter in staat gesteld om wiskundige concepten niet alleen te begrijpen, maar ook effectief toe te passen in natuurkundige contexten: “Without insight, there is no skill, and without skill, there is no insight” (Drijvers, 2011, p. 141).

Dit benadrukt dat inzicht en (basis)vaardigheid elkaar versterken en samen cruciaal zijn om wiskunde effectief toe te passen, ook bij succesvolle transfer naar natuurkunde.

Literatuur

- Badmus, O. T., & Jita, L. C. (2024). Physics difficulty and problem-solving: Exploring the role of mathematics and mathematical symbols. *Interdisciplinary Journal of Education Research*, 6, 1-14.
- Dierdorp, A., Bakker, A., van Maanen, J., & Eijkelhof, H. (2014). Meaningful statistics in professional practices as a bridge between mathematics and science: An evaluation of a design research project. *International Journal of STEM Education*, 1(9), 1–15.
- Dominguez, A., De la Garza, J., Quezada-Espinoza, M., & Zavala, G. (2023). Integration of Physics and Mathematics in STEM Education: Use of Modeling. *Education Sciences*, 14(1), 20.
- Drijvers, P. (Ed.). (2011). Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown. Rotterdam: Sense.
- Ottink, H., Dalen van, B., Jong de, R., Lingen van der, K., Nijhof, E., Vink, H., (2014). Systematische Natuurkunde, 8e editie basisboek, 4 vwo. Amersfoort, Nederland: ThiemeMeulenhoff.
- Redish, E. F. (2021a). Using math in physics: Overview. *The Physics Teacher*, 59(5), 314-318.
- Redish, E. F. (2021b). Using math in physics: 1. Dimensional Analysis. *The Physics Teacher*, 59(6), 397-400.
- Retnawati, H., Arlinwibowo, J., Wulandari, N. F., & Pradani, R. G. (2018). Teachers' Difficulties and Strategies in Physics Teaching and Learning That Applying Mathematics. *Journal of Baltic Science Education*, 17(1), 120-135.
- Roorda, G. (2012). Ontwikkeling in verandering: Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide (Proefschrift). Rijksuniversiteit Groningen. Geraadpleegd op 17 november 2024, van <https://research.rug.nl/en/publications/ontwikkeling-in-verandering-ontwikkeling-van-wiskundige-bekwaamhe>.
- SLO. (2024, 26 november). Geraadpleegd op <http://international.SLO.nl>.
- Turşucu, S. (2019). Successful transfer of algebraic skills from mathematics into physics in senior preuniversity education (Doctoral dissertation). Link: <https://repository.tudelft.nl/>
- Turşucu, S., Spandaw, J., de Vries, M. J. (2020). The effectiveness of activation of prior mathematical knowledge during problem- solving in physics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(4), em1837. <https://doi.org/10.29333/ejmste/116446>.
- Turşucu, S. (2021). Problematisch, maar niet zonder oplossingen. *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*. 88(8), 20-24.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

- Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1–14.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160130102>.