

5.12 Relativiteitstheorie Lesmaterialen

Opgaven relativiteitstheorie

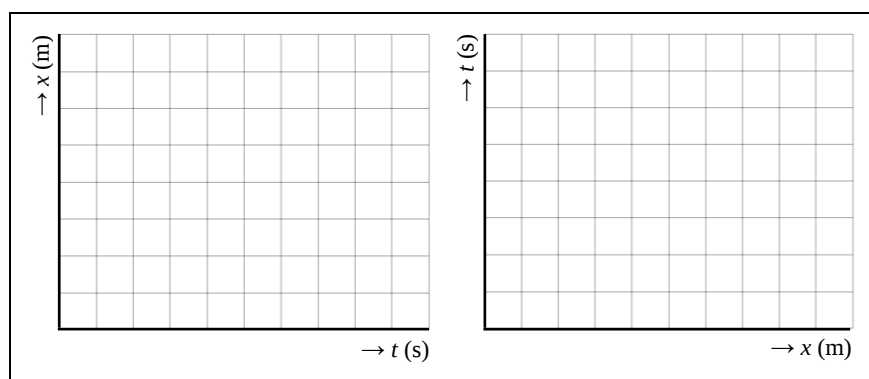
Loran de Vries

Ruimtetijsdiagram

Leerdoelen

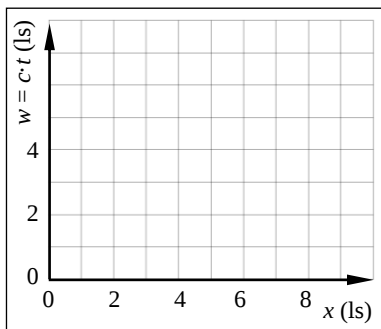
- Je weet dat in een *ruimtetijsdiagram* de plaats (horizontaal) is uitgezet tegen de tijd (verticaal).
- Je kunt uitleggen wat een *lichtseconde* is.
- Je kunt uitleggen waarom we in een ruimtetijsdiagram de afstand in de eenheid lichtseconde op de ruimte-as uitzetten.
- Je kunt uitleggen waarom we in een ruimtetijsdiagram de tijd in de eenheid lichtseconde op de tijd-as uitzetten.

- In figuur 1 zie je een leeg plaats,tijd-diagram (links) en een leeg tijd,plaats-diagram (rechts) voor het weergeven van de volgende drie situaties:
 - een fietser met een constante snelheid,
 - een optrekkende raceauto,
 - een verticaal op en neer stuiterende bal.
 - Schets de grafieken voor de situaties A t/m C in het x,t -diagram van figuur 1 links (met de tijd op de horizontale as).
 - Schets de grafieken voor de situaties A t/m C in het t,x -diagram van figuur 1 rechts (met de tijd op de verticale as).

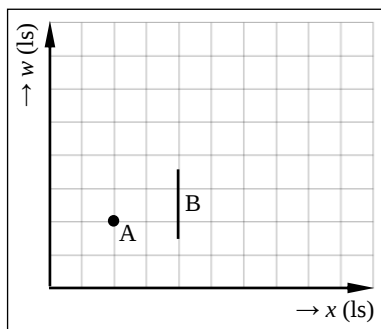


Figuur 1

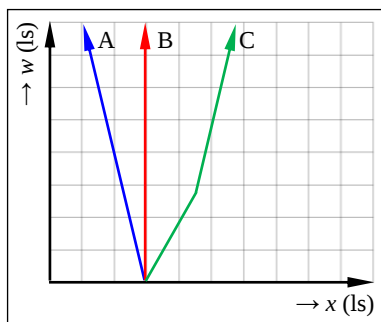
- In figuur 2 zie je een leeg plaats,tijd-diagram (links) en een leeg tijd,plaats-diagram (rechts) voor het weergeven van de volgende twee situaties (die ook in opgave 3 aan de orde zullen komen):
 - een trein die beweegt met de helft van de lichtsnelheid ($v = 0,5 \cdot c$),
 - een foton dat beweegt met de lichtsnelheid (c).
 - Schets de grafieken voor de situaties A en B in het x,t -diagram van figuur 2 links, en in het t,x -diagram van figuur 2 rechts.
 - Schets de grafieken voor de situaties A en B ook in het ruimtetijsdiagram van figuur 3.



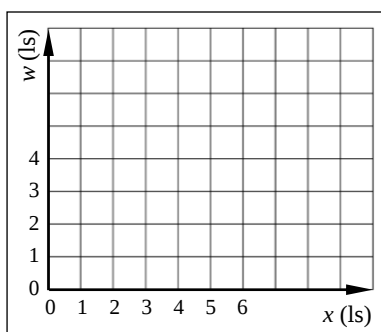
Figuur 3 – Ruimtetijd diagram.



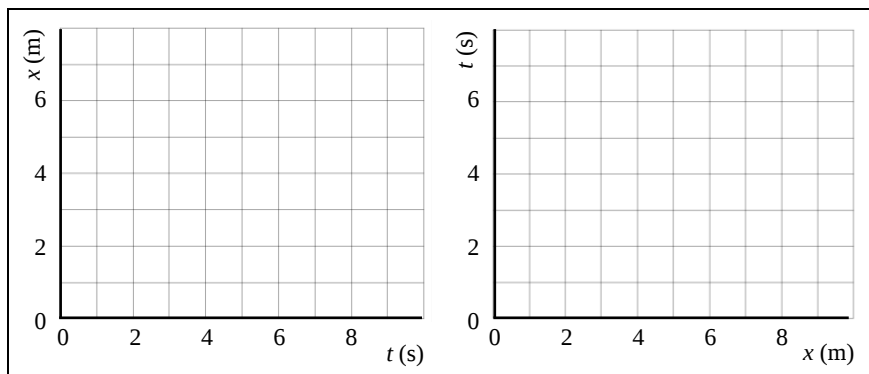
Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6



Figuur 2

Leerdoelen

- Je kunt van een gebeurtenis de coördinaten aflezen in een ruimtetijd diagram.
- Je kunt een wereldlijn tekenen van een lichtstraal in een ruimtetijd diagram.
- Je kunt van een voorwerp met (constante) snelheid v een wereldlijn tekenen in een ruimtetijd diagram.
- Je kunt aan de hand van een wereldlijn in een ruimtetijd diagram bepalen of het voorwerp stilstaat, met constante snelheid beweegt of versnelt.
- Je kunt bij een gegeven wereldlijn in een ruimtetijd diagram de snelheid (bijvoorbeeld $v = 0,25 \cdot c$) en de bewegingsrichting (positief of negatief) bepalen.
- Je kunt met een ruimtetijd diagram uitleggen dat bij elk pad dat afgelegd wordt door de ruimte het voorwerp ook een pad aflegt door de ruimtetijd, maar dat niet bij elk pad door de ruimtetijd ook een pad door de ruimte hoort.

3 In het ruimtetijd diagram van figuur 3 heb je bij opgave 2 al de wereldlijnen geschetst van een trein die beweegt met de helft van de lichtsnelheid en een foton dat beweegt met de lichtsnelheid. Schets in figuur 3 ook de volgende twee situaties:

- C** een foton dat in de negatieve ruimerichting beweegt,
- D** een lichtsignaal dat precies een seconde duurt.

4 In figuur 4 zie je een ruimtetijd diagram, met daarin een stip A en een lijnstuk B.

- a** Wat kun je in dit ruimtetijd diagram aanduiden als een gebeurtenis: A of B?
- b** Kun je ook een betekenis toekennen aan het andere object? Zo ja, welke betekenis?

5 In het ruimtetijd diagram van figuur 5 zijn drie wereldlijnen weergegeven.

- a** Welke wereldlijn beschrijft geen pad door de ruimte?
- b** Beschrijf wat elk van de wereldlijnen zou kunnen voorstellen.
- c** Teken in figuur 5 de wereldlijn die jou voorstelt, terwijl je deze opgave zit te maken.

6 In water is de lichtsnelheid maar $0,75 \cdot c$.

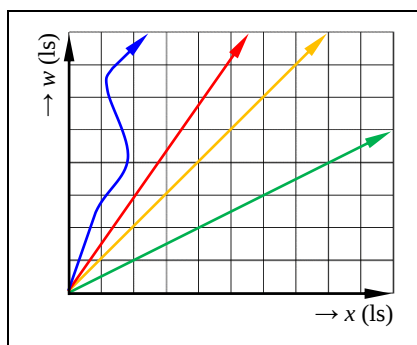
- a** Teken in het ruimtetijd diagram van figuur 6 een wereldlijn van een foton dat door water beweegt.

In het ruimtetijdpunt $w = 1$, $x = 4$ gaat een lamp aan die gedurende 3 s aan blijft. De lamp zendt in vacuüm in alle richtingen licht uit.

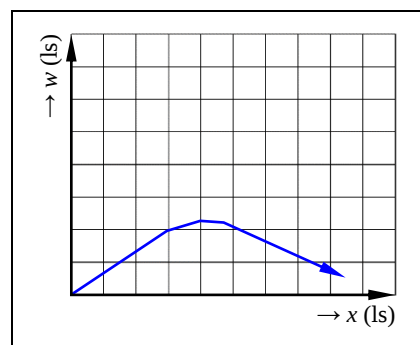
- b** Teken dit in het ruimtetijd diagram van figuur 6.
- c** Als in het ruimtetijd diagram in 'alle' richtingen licht wordt uitgezonden, over hoeveel richtingen gaat het dan?
- d** Tussen welke tijdstippen wordt het punt $x = 6$ belicht?

7 In de twee ruimtetijd diagrammen van figuur 7 en 8 zijn een aantal wereldlijnen weergegeven.

- Kunnen wereldlijnen elkaar snijden? Zo ja, wat is de betekenis van het snijpunt? Zo nee, waarom niet?
- Geef in het ruimtetijd diagram van figuur 7 de tijdstippen aan waarop het voorwerp met de kronkelende blauwe wereldlijn stilstaat.
- Waarom is de blauwe wereldlijn in figuur 8 onmogelijk?



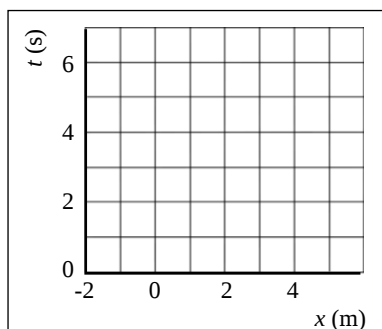
Figuur 7



Figuur 8

Coördinatenstelsel

- Beweging vindt plaats ten opzichte van een *coördinatenstelsel*.
- Een coördinatenstelsel (of *referentiekader*) is gedefinieerd ten opzichte van een *oorsprong*.
- Positienummers*, *tijdstippen* en *snelheden* zijn *relatief* (zijn afhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel). *Tijdsintervallen* en *lengtes* zijn (voor lage snelheden) *absoluut*.
- Als waarnemers dezelfde snelheid hebben (niet ten opzichte van elkaar bewegen), zitten ze in hetzelfde coördinatenstelsel.
- Een *gebeurtenis* is één bepaalde plaats op één bepaald tijdstip.
- Een referentiekader of coördinatenstelsel strekt zich oneindig ver uit in alle richtingen.

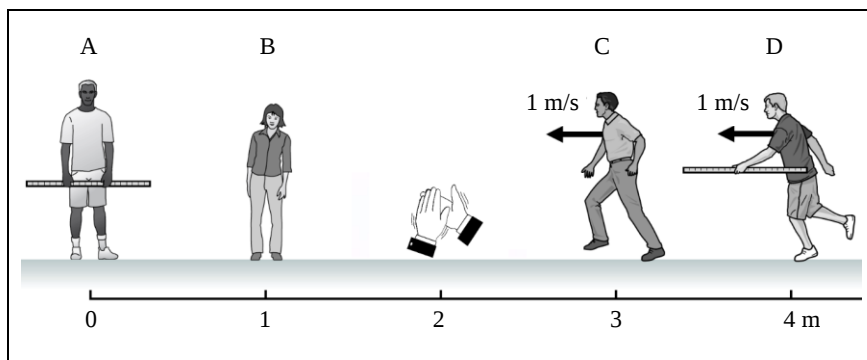


Figuur 10

8 Wat is het verschil tussen een pad door de ruimte en een wereldlijn door de ruimtetijd?

Leerdoelen

- Je kunt uitleggen dat alle waarnemers die in hetzelfde coördinatenstelsel zitten aan een gebeurtenis dezelfde positie toekennen.
- 9 In figuur 9 zie je vier 'waarnemers': A en B staan stil, C en D lopen met (dezelfde) constante snelheid van 1 m/s. Noem A de oorsprong van zijn stelsel, noem D de oorsprong van zijn stelsel. Er gaat iemand tussen de waarnemers staan en deze klap op $t = 0$ kort één keer in zijn handen.
- Wat is de 'positie van de klap' voor elke waarnemer?



Figuur 9

B gooit op $t = 0$ een bal (redelijk) horizontaal naar C met een snelheid van 2 m/s, terwijl C aan komt lopen.

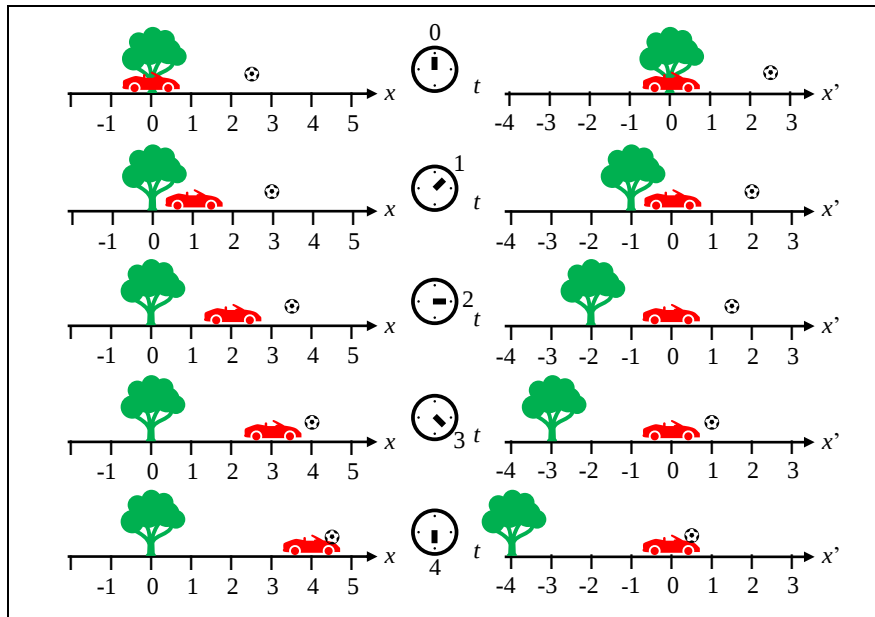
- Wat is de snelheid van de bal voor elke waarnemer?
- Teken voor elke waarnemer (A t/m D) en de bal wereldlijnen in het ruimtetijd diagram van figuur 10.

10 In figuur 11 zie je de beweging van een boom, een bal en een auto van $t = 0$ tot $t = 4$ s.

- Vul de tabel van figuur 12 in met de snelheden van deze drie voorwerpen. In figuur 13 zie je het ruimtetijd diagram vanuit het coördinatenstelsel van de boom.
- Teken in figuur 14 de wereldlijnen van de boom en de bal, gezien vanuit het

coördinatenstelsel van de *auto*.

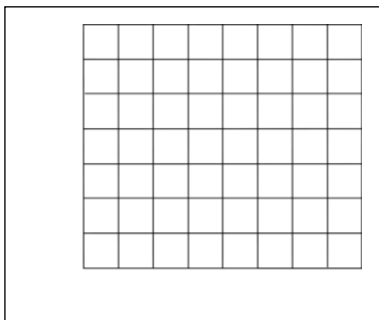
- c Teken in figuur 15 de wereldlijnen van de boom en de auto, gezien vanuit het coördinatenstelsel van de *bal*.



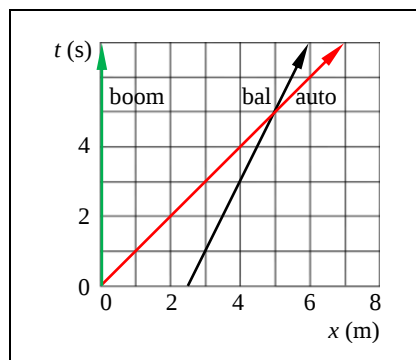
Figuur 11

snellheid (in m/s) van → ten opzichte van ↓	boom	auto	bal
boom			
auto			
bal			

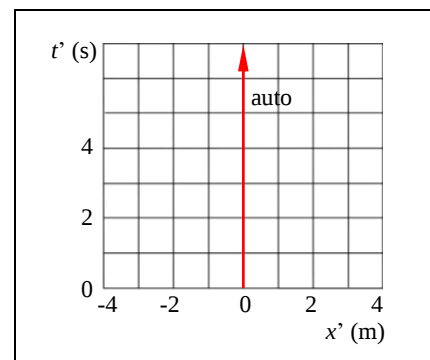
Figuur 12



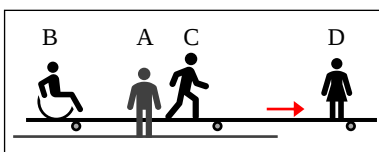
Figuur 15 – Ruimtetijsdiagram in het coördinatenstelsel van de *bal*.



Figuur 13 – Ruimtetijsdiagram in het coördinatenstelsel van de boom.



Figuur 14 – Ruimtetijsdiagram in het coördinatenstelsel van de *auto*.



Figuur 16

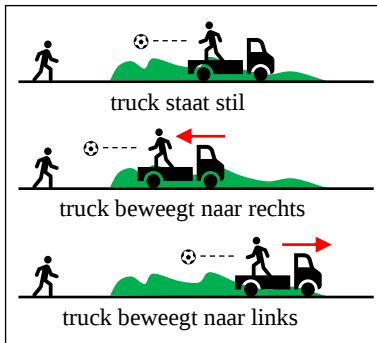
- 11 De loopband in figuur 16 beweegt met een snelheid van 1 m/s naar rechts ten opzichte van de grond. Waarnemer A staat stil op de vloer buiten de loopband. De waarnemers B en D staan stil op de loopband. Waarnemer C loopt met een snelheid van 3 m/s ten opzichte van de loopband. Wat is de snelheid van waarnemer C...

- a ten opzichte van waarnemer A?
b ten opzichte van waarnemer B?
c ten opzichte van waarnemer C?
d ten opzichte van waarnemer D?

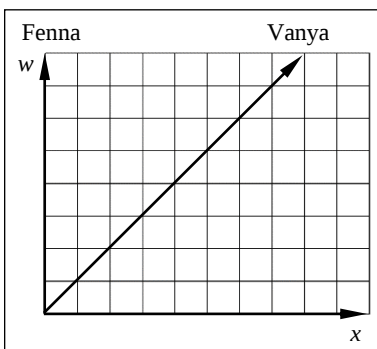
- 12 Welke van de onderstaande zinnen kunnen dezelfde situatie beschrijven?
- A Anton heeft een snelheid v en Bianca staat stil.
 - B Anton heeft een snelheid v ten opzichte van Bianca.
 - C Bianca heeft een snelheid v ten opzichte van Anton.
 - D Bianca heeft een snelheid v en Anton staat stil.

Leerdoelen

- Je kunt (niet-relativistische) snelheden optellen, gemeten vanuit verschillende stelsels.
- Je kunt (niet-relativistische) snelheden optellen in een ruimtetijd-diagram.



Figuur 17



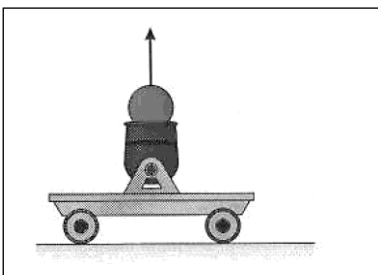
Figuur 18 – Snelheden optellen volgens Newton.

- 13 Lees de tekst hieronder en vul de gaten.
- a Jij gooit een bal met 20 km/h naar jouw vriend die stil staat op de grond (figuur 17 boven). Als de truck niet beweegt, is de snelheid van de bal gemeten in het coördinatenstelsel dat vastgemaakt is aan jouw vriend (aan de grond dus) gelijk aan
 - b In het stelsel van de truck (figuur 17 boven) is de snelheid van de bal
 - c Als de truck naar jouw vriend toe beweegt (figuur 17 midden) met een snelheid van 40 km/h, is de snelheid van de bal (gemeten in het stelsel van jouw vriend) gelijk aan
 - d In het stelsel van jouw vriend (figuur 17 midden) zal de bal hem sneller bereiken, maar de snelheid van de bal is nog steeds in het bewegende stelsel (de truck).
 - e Als de truck van jouw vriend weg beweegt (figuur 17 onder) met een snelheid van 15 km/h, is de snelheid van de bal (gemeten in het stelsel van jouw vriend) gelijk aan
 - f In het stelsel van jouw vriend (figuur 17 onder) zal de bal hem later bereiken, maar de snelheid van de bal is nog steeds in het bewegende stelsel (de truck).
- 14 Fenna staat stil en Vanya beweegt met een constante snelheid v ten opzichte van Fenna. In figuur 18 zijn de wereldlijnen van Fenna en Vanya in één ruimtetijd-diagram getekend. Fenna gooit op $t = 0$ een bal met een snelheid $\frac{1}{2} \cdot v$ naar voren (ten opzichte van Fenna).
- a Teken de wereldlijn van de bal die Fenna gooit in figuur 18. Ook Vanya gooit een bal met een snelheid $\frac{1}{2} \cdot v$ naar voren (ten opzichte van Vanya).
 - b Teken de wereldlijn van de bal die Vanya gooit in figuur 18.

Eerste postulaat

Leerdoelen

- Je kunt met een voorbeeld uitleggen wat het *eerste postulaat* inhoudt: “Voor waarnemers die ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen (inertiaalwaarnemers) geldt dat de natuurkundige wetten hetzelfde zijn.”

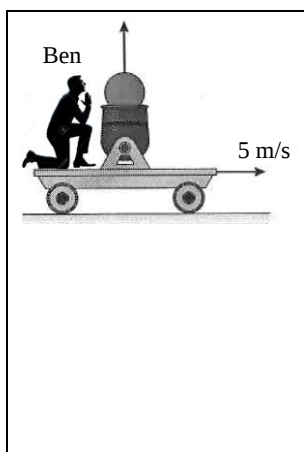


Figuur 19

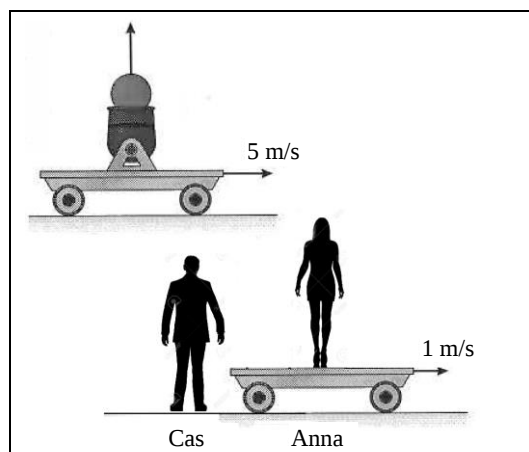
- 15 Een bal wordt recht omhoog afgeschoten vanaf een stilstaande kar (zie figuur 19). Als de bal naar beneden komt, landt deze weer in het kanon. Bij deze opgave worden luchtwrijving en windeffecten verwaarloosd. Nu rolt de kar met een constante snelheid van 5 m/s ten opzichte van de grond naar rechts. Ondertussen wordt de bal weer verticaal omhoog afgeschoten. Ben zit stil op de kar en neemt dit waar (zie figuur 20).
- a Schets het pad van de bal dat Ben waarneemt, terwijl de bal omhoog en weer omlaag gaat in het kader onder figuur 20.
 - b Als de bal weer naar beneden komt, zal de bal uit figuur 20 dan volgens Ben voor het kanon, achter het kanon of in het kanon neerkomen? Leg uit.

Anna en Cas nemen deze kar ook waar (zie figuur 21). Anna zit op een kar die met een constante snelheid van 1 m/s ten opzichte van de grond naar rechts gaat. Cas staat stil op de grond.

- c Schets het pad van de bal dat Cas waarneemt in het kader onder figuur 21 met een (gewone) lijn.
- d Als de bal weer naar beneden komt, zal de bal uit figuur 21 dan volgens Cas voor het kanon, achter het kanon of in het kanon neerkomen? Leg uit.
- e Schets het pad van de bal dat Anna waarneemt in het kader onder figuur 21 met een stippellijn.
- f Als de bal weer naar beneden komt, zal de bal uit figuur 21 dan volgens Anna voor het kanon, achter het kanon of in het kanon neerkomen? Leg uit.



Figuur 20



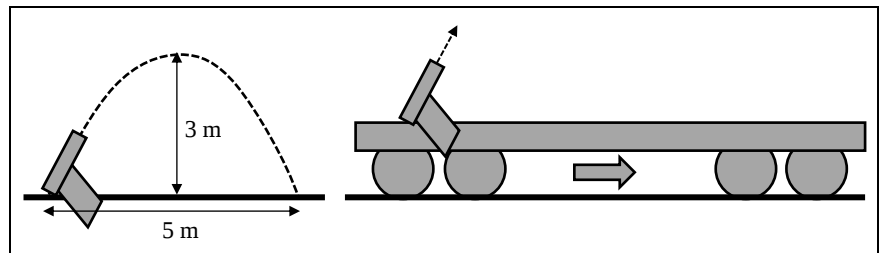
Figuur 21



- g Veranderen je antwoorden op de vragen c en d (waarnemingen van Cas) als de kar gedurende de hele beweging naar voren versnelt? Zo ja hoe?
We gaan weer terug naar de situatie met constante snelheid.
Cas meet dat de kinetische energie van de bal direct na het afschieten (de bal is net los van de veer) 1000 J is.
- h Anna meet op dit moment (direct na het afschieten) een kinetische energie van de bal *groter dan*, *kleiner dan* of *gelijk aan* 1000 J (omcirkel het juiste antwoord, en leg uit).
De bal bereikt zijn hoogste punt en keert weer op dezelfde hoogte terug als het moment direct na het afschieten.
- i Cas meet op dit moment een kinetische energie van de bal *groter dan*, *kleiner dan* of *gelijk aan* 1000 J (omcirkel het juiste antwoord, en leg uit).
- j Anna meet op dit moment een kinetische energie van de bal *groter dan*, *kleiner dan* of *gelijk aan* 1000 J (omcirkel het juiste antwoord, en leg uit).

- 16 Twee identieke speelgoedpistolen staan onder dezelfde hellingshoek opgesteld. Eén staat op de grond, de andere staat op een trein die met constante snelheid beweegt.
De kogel die op de grond wordt afgeschoten (figuur 22 links) beweegt in een paraboolbaan. Hierbij legt de kogel een horizontale afstand af van 5 m. De maximale hoogte die de kogel bereikt is 3 m.
Nu schieten we een kogel af in de trein (figuur 22 rechts). Beschouw de horizontale afstand die de kogel aflegt en de maximale hoogte die de kogel

bereikt *ten opzichte van de trein* (iemand dit stilzit op het treinstel kijkt dus naar een kogel die afgeschoten wordt in die trein).



Figuur 22

Hieronder staat een aantal uitspraken. Deze uitspraken worden gevolgd door vier opties: A, B, C en D. Omcirkel bij elk van de uitspraken steeds één optie:

- A** De uitspraak is *zeker waar*.
- B** Ik weet het *niet zeker*, maar de uitspraak *kan waar zijn*.
- C** Ik weet het *niet zeker*, maar de uitspraak *lijkt mij onjuist*.
- D** De uitspraak is *zeker onjuist*.

Beoordeel de uitspraken in de volgorde van a t/m e. Ga niet terug naar een eerdere uitspraak die je al hebt gelezen en beoordeeld.

Uitspraken

- a** De horizontale afstand die de kogel aflegt is in de trein groter dan 5 m doordat de trein naar rechts beweegt. De maximale verticale hoogte is nog steeds 3 m. **A B C D**
 - b** Zowel de horizontale afstand als de verticale afstand die de kogel aflegt zullen in de trein anders zijn, doordat de trein naar rechts beweegt. **A B C D**
 - c** Zowel de horizontale afstand als de verticale afstand die de kogel aflegt zullen in de trein hetzelfde zijn als op de grond, omdat de bewegingswetten hetzelfde zijn in de trein en op de grond. **A B C D**
 - d** De kogel die is afgevuurd in de trein legt *volgens een waarnemer in de trein* een paraboolbaan af. **A B C D**
- We laten ook iemand die stilzit op de grond naast de rails naar de kogel kijken die in de trein afgeschoten wordt.
- e** Een *waarnemer op de grond* en een *waarnemer in de trein* zien hetzelfde pad van de kogel die in de trein is afgevuurd, omdat de bewegingswetten hetzelfde zijn in de trein als op de grond. **A B C D**

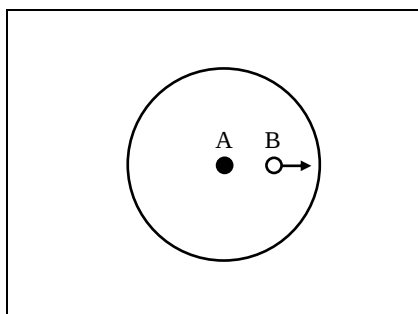
Tweede postulaat

Leerdoelen

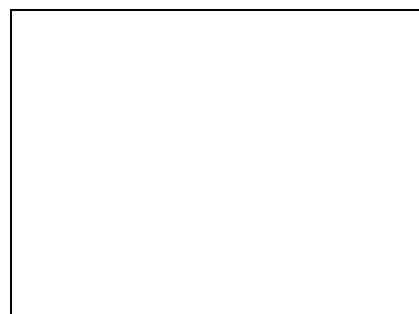
- Je kunt met een voorbeeld uitleggen wat het *tweede postulaat* inhoudt: “Waarnemers die ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen (inertiaalwaarnemers) meten dezelfde waarde voor de lichtsnelheid (in vacuüm).”
- Je kunt uitleggen dat het tweede postulaat in tegenspraak is met de newtoniaanse optelformule voor snelheden.

- 17 Arnold en Britney bewegen met een constante snelheid ten opzichte van elkaar en komen elkaar tegen. Precies op het moment dat ze elkaar tegenkomen springt er een vonk tussen hen over. De vonk zendt een lichtflits uit in een cirkelvormig patroon. In figuur 23 zie je het golffront een korte tijd nadat de vonk oversprong. Dit

golffront is waargenomen door Arnold (A).

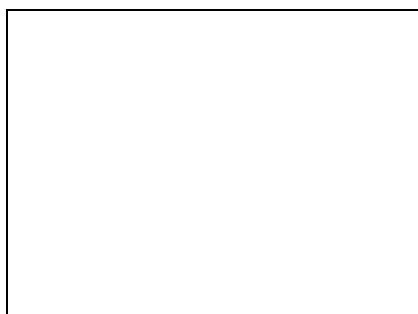


Figuur 23 – Golffront in het stelsel van Arnold (A) kort nadat de vonk is overgesprongen.

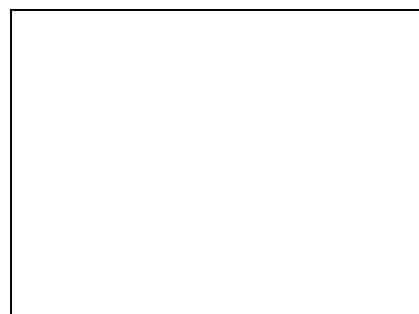


Figuur 24 – Golffront in het stelsel van Arnold een moment later.

- a Is er een moment dat de afstand van Arnold (A) tot Britney (B) groter is dan de afstand van Arnold tot het golffront? Leg uit.
- b Schets in figuur 24 het golffront op een kort moment later vanuit het stelsel van Arnold. Verwerk de posities van Arnold (A) en Britney (B) in je schets. We kunnen deze situatie ook vanuit het stelsel van Britney bekijken.
- c Schets in figuur 25 het golffront op een kort moment nadat de vonk is overgesprongen vanuit het stelsel van Britney. Verwerk de posities van Arnold (A) en Britney (B) in je schets.
- d Schets in figuur 26 het golffront op een kort moment later vanuit het stelsel van Britney. Verwerk de posities van Arnold (A) en Britney (B) in je schets.



Figuur 25 – Golffront in het stelsel van Britney (B) kort nadat de vonk is overgesprongen.



Figuur 26 – Golffront in het stelsel van Britney een moment later.

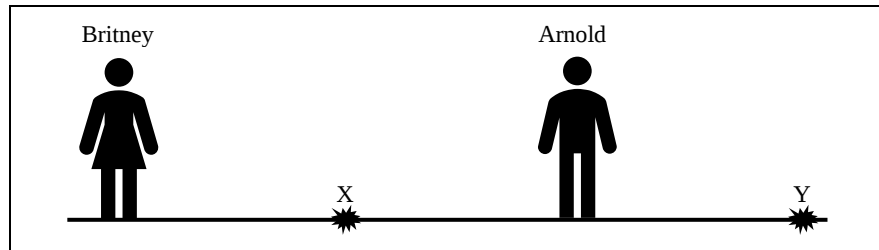
Relativiteit van gelijktijdigheid

Leerdoelen

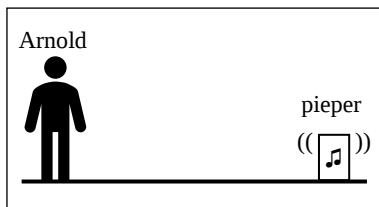
- Je kunt uitleggen dat er een verschil is tussen de gebeurtenis ‘maan ontploft’ en de gebeurtenis ‘lichtsignaal van maanontploffing bereikt waarnemer op aarde’.
- Je kunt uitleggen wat we bedoelen met een intelligente waarnemer: wat kan een intelligente waarnemer wel en een gewone waarnemer niet? (Alle waarnemers in de relativiteitstheorie zijn intelligente waarnemers.)
- Je kunt uitleggen hoe de treinparadox leidt tot de conclusie dat gelijktijdigheid relatief is.

- 18** In de situatie van figuur 27 ontploffen er rotjes in de punten X en Y. Op het moment dat een rotje ontploft, wordt er een lichtsignaal uitgezonden. Dit lichtsignaal breidt zich in alle richtingen uit in een cirkelvormig golffront. Arnold staat precies tussen de punten X en Y in en ontvangt het golffront van rotje X tegelijkertijd met het golffront van rotje Y.

- a Ontplofte rotje X in het coördinatenstelsel van Arnold voor, na of precies op hetzelfde moment als rotje Y ontplofte?
- b Ontvangt Britney het golffront afkomstig van rotje X voor, na of precies op hetzelfde moment als het golffront van rotje Y?
- c Ontplofte rotje X in het coördinatenstelsel van Britney voor, na of precies op hetzelfde moment als rotje Y ontplofte?



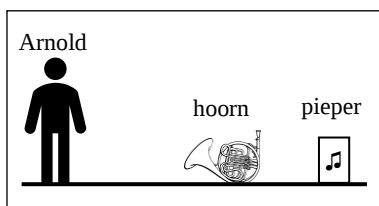
Figuur 27



Figuur 28

Intelligente waarnemer

Een *intelligente waarnemer* is voorzien van meetinstrumenten (linialen, klokken, assistenten) en is in staat deze te gebruiken om nauwkeurige metingen te doen van wanneer en waar een gebeurtenis plaatsvindt. Een intelligente waarnemer is in staat om te corrigeren voor de reistijd van het signaal van de bron naar de waarnemer. Alle waarnemers binnen onze studie van de relativiteitstheorie zijn intelligente waarnemers.



Figuur 29

Treinparadox

De opgaven 21 t/m 25 en later opgave 36 behandelen de zogeheten *treinparadox*.

- 19 Arnold en een pieper zijn opgesteld zoals in figuur 28. De pieper staat op het punt een piep uit te zenden en Arnold wil het exacte moment bepalen waarop dit gebeurt. Maar Arnold is ver van de pieper verwijderd (de figuur is niet op schaal) en is niet in staat naar de pieper toe te lopen.

Arnold is voorzien van nauwkeurige linialen en klokken, en heeft een flink aantal assistenten.

- a Beschrijf een serie metingen waarmee Arnold de tijd kan bepalen waarop de piep is uitgezonden, gebruikmakend van de geluidssnelheid in lucht (343 m/s).
- b Beschrijf een methode waarmee Arnold de tijd kan bepalen waarop de piep is uitgezonden, *zonder* gebruik te maken van de geluidssnelheid. Aanwijzing: de assistenten kunnen overal gaan staan op iedere locatie.

Een misdadiger is op de vlucht in Amsterdam. Zijn identiteit en exacte locatie zijn niet bekend. Een journaliste heeft reden om aan te nemen dat de misdadiger spoedig zijn misdaad zal bekennen. Zij wil de plaats en het tijdstip van deze bekentenis zo nauwkeurig mogelijk vastleggen. Haar budget voor dit project is zeer ruim.

- c Beschrijf de groep waarnemers en spullen waarmee de journaliste de positie en tijd van de bekentenis zou kunnen vastleggen.

Een *referentiekader* of *coördinatenstelsel* van een waarnemer is een groep assistenten en meetinstrumenten waarmee de waarnemer de positie en het tijdstip van iedere gebeurtenis kan bepalen die plaatsvindt.

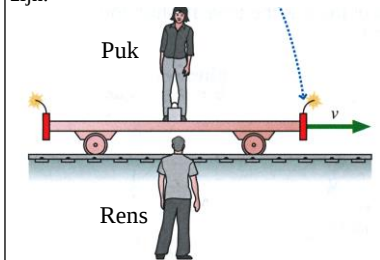
- d Verdedig de stelling dat de groep waarnemers en meetinstrumenten het coördinatenstelsel van de journaliste vormen.

- 20 Tussen Arnold en de pieper bevindt zich een hoorn zoals in figuur 29. De pieper piept en de hoorn honkt. Arnold hoort de twee geluiden op precies hetzelfde tijdstip.

- a Beschrijf een methode waarmee Arnold de tijdsduur tussen het uitzenden van de piep en het uitzenden van de honk kan meten in zijn coördinatenstelsel zonder eerst de geluidssnelheid te bepalen.
- b Wordt de piep uitgezonden in het stelsel van Arnold voor, na of tegelijkertijd met het tijdstip dat de honk wordt uitgezonden door de hoorn? Leg uit.

- 21 In figuur 30 zie je een trein die rijdt met een snelheid v ten opzichte van de rails. Aan de voorkant en de achterkant van de trein zijn rotjes bevestigd. De rotjes zijn zo krachtig dat als ze ontploffen er roetvlekken op de rails achterblijven op de posities waar ze ontploft zijn. Ook op het treinstel zelf blijven roetvlekken achter. Rens (R) staat op de grond stil ten opzichte van de rails en ziet de trein langsrijden. Puk (P) staat in het midden van de trein stil. De rotjes aan de voorkant en de achterkant van de rijdende trein ontploffen. Als elk rotje ontploft, wordt een lichtflits geproduceerd ('golffront voor' en 'golffront achter').

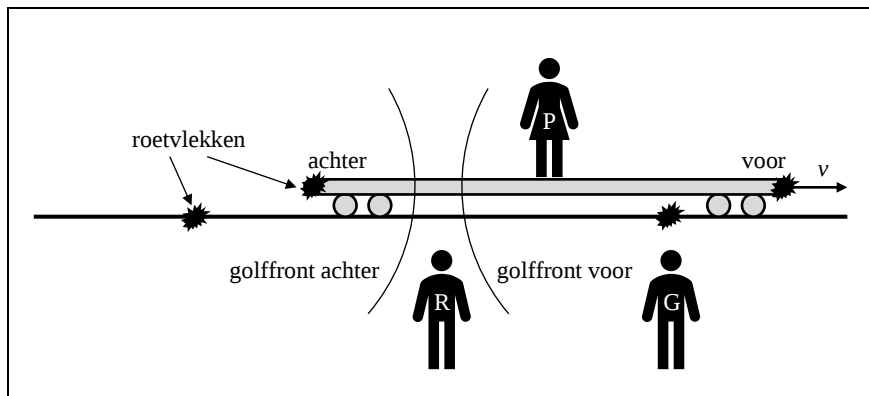
De rotjes maken roetvlekken op de trein en op de rails op de posities waar ze ontploft zijn.



Figuur 30

Rens staat precies in het midden tussen de roetvlekken op de rails. ‘Golffront achter’ en ‘golffront voor’ raken hem op hetzelfde moment. Dit moment is weergegeven in figuur 31.

- a Ontplofte het rotje aan de voorkant voor, na of precies op hetzelfde moment als het rotje aan de achterkant van de trein als we dit meten in het stelsel van Rens? Leg uit.



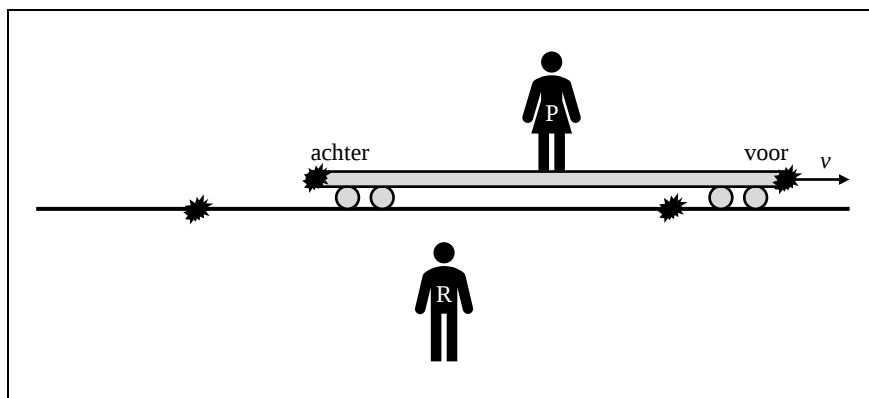
Figuur 31 – Het stelsel van Rens.

Gerard (G) is de assistent van Rens en staat ook stil op de grond ter hoogte van de roetvlek op de rails aan de voorkant.

- b Ontplofte het rotje aan de voorkant voor, na of precies op hetzelfde moment als het rotje aan de achterkant van de trein als we dit meten in het stelsel van Gerard? Leg uit.

Figuur 32 geeft de situatie weer op een kort moment nadat de rotjes zijn ontploft in het stelsel van Rens, maar voordat hij een van beide golffronten ontvangt.

- c Maak figuur 32 af door de golffronten op dit moment er in te tekenen.



Figuur 32 – Het stelsel van Rens, kort nadat de rotjes zijn ontploft.

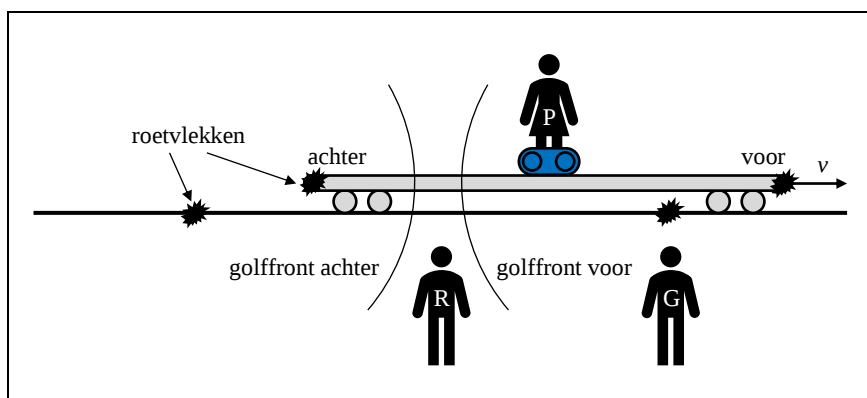
Puk staat in de situatie van figuur 31 stil in het midden van de trein. We noemen ‘voorste rotje ontploft’ gebeurtenis 1, ‘Rens en Puk passeren elkaar’ gebeurtenis 2 en ‘achterste rotje ontploft’ gebeurtenis 3.

- d Vindt gebeurtenis 1 voor, na of precies op hetzelfde moment plaats als gebeurtenis 2, als we dit meten in het stelsel van Rens? Leg uit.
- e Raakt ‘het golffront van de voorkant’ Puk voor, na of precies op hetzelfde moment als ‘het golffront van de achterkant’ haar raakt, als we dit meten in het stelsel van Rens? Leg uit.

- 22 Bij de voeten van Puk in het midden van de trein staat een gettoblaster, zoals in figuur 33. Als ‘het golffront van de voorkant’ (in het stelsel van Rens) de gettoblaster raakt, wordt het begin van de vijfde symfonie van Beethoven gespeeld op het hardste volume. Als ‘het golffront van de achterkant’ de

gettoblaster raakt, stopt de muziek weer. Als beide golffronten (in het stelsel van Rens) tegelijkertijd bij de gettoblaster aankomen, speelt deze niet. Speelt de gettoblaster Beethoven...

- a in het stelsel van Rens?
- b in het stelsel van Puk?

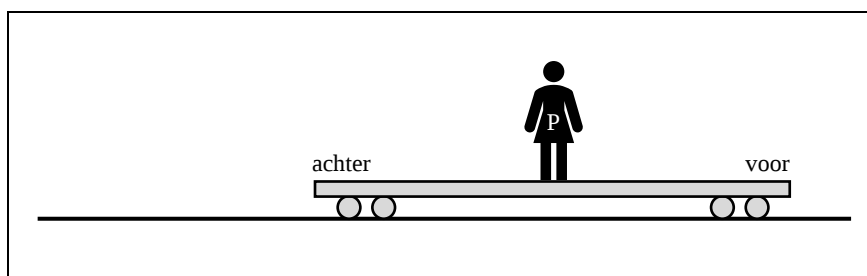


Figuur 33 – Het stelsel van Rens, met een gettoblaster bij de voeten van Puk.

- 23 Controleer of je antwoorden op de vragen 22a en b in lijn zijn met de volgende twee vragen.
- a De muziek kwam van een oud cassettebandje. Later op de dag haalt Puk het bandje uit de gettoblaster. Ze stapt uit de trein en bestudeert het cassettebandje samen met Rens. Zal het cassettebandje gedraaid zijn ten opzichte van de startpositie?
 - b Zal Puk Beethoven gehoord hebben?
- 24 We gaan nu de situatie van figuur 31 vanuit het stelsel van Puk bekijken.
- a Raakt 'het golffront van de voorkant' Puk *voor*, *na* of *precies op hetzelfde moment* als 'het golffront van de achterkant' haar raakt, als we dit meten in het stelsel van Puk? Leg uit.
 - b Is de snelheid van 'het golffront van de voorkant' *groter*, *kleiner* of *gelijk aan* de snelheid van als 'het golffront van de achterkant', als we dit meten in het stelsel van Puk? Leg uit.
 - c In het stelsel van Puk geldt voor Puk (omcirkel het juiste antwoord, en leg uit):
 - A Het voorste rotje ontploft later dan het achterste rotje.
 - B Het voorste rotje ontploft eerder dan het achterste rotje.
 - C Het voorste en achterste rotje ontploffen tegelijkertijd.

Figuur 34 geeft de situatie weer op een kort moment nadat de rotjes zijn ontploft in het stelsel van Puk, maar voordat zij een van beide golffronten ontvangt.

- d Maak figuur 34 af door de golffronten op dit moment er in te tekenen.

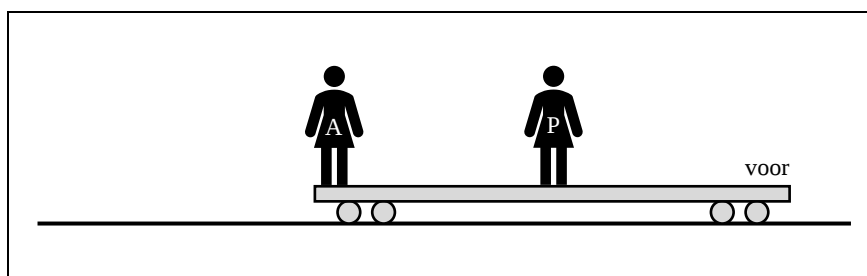


Figuur 34 – Het stelsel van Puk.

- 25 Puks vriendin Anna (A) was ook bij het experiment. Zij staat stil in de trein aan de achterkant, zoals in figuur 35.
- In het stelsel van Anna vindt gebeurtenis 1 ('voorste rotje ontploft') plaats

op $t = t_1^A$ en vindt gebeurtenis 3 ('achterste rotje ontploft') plaats op $t = t_3^A$. Voor Anna geldt (omcirkel het juiste antwoord, en leg uit):

- A** Het voorste rotje ontploft later dan het achterste rotje.
- B** Het voorste rotje ontploft eerder dan het achterste rotje.
- C** Het voorste en achterste rotje ontploffen tegelijkertijd.



Figuur 35 – Het stelsel van Puk.

- 26** De Vesuvius en de Etna zijn twee vulkanen die 6 ls ($1,8 \cdot 10^6$ km) van elkaar liggen. Plotseling barsten beide vulkanen tegelijkertijd uit, gemeten in het stelsel van waarnemer A die precies in het midden tussen de vulkanen stil staat. Waarnemer B staat stil aan de voet van de Vesuvius.

- a** Leg uit of de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit' *voor*, *na* of *tegelijkertijd* met de gebeurtenis 'Etna barst uit' plaatsvindt volgens waarnemer B.

Een snelle raket beweegt met een snelheid $v = \frac{1}{2} \cdot c$ ten opzichte van de grond, zoals in figuur 36. Op het moment dat de Vesuvius uitbarst, vliegt de raket er precies boven, dus ontvangt de raket het licht van de uitbarsting van de Vesuvius direct.

De vraag is nu of de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit' *voor*, *na* of *tegelijkertijd* met de gebeurtenis 'Etna barst uit' plaatsvindt volgens waarnemer C in de raket (zie figuur 37). Om deze vraag te beantwoorden maken we in gedachten de raket even lang als de afstand Vesuvius-Etna, en nemen we aan dat de vulkanen brandvlekken maken op de vulkanen zelf en op de raket.

- b** Geef antwoord op de volgende drie vragen:

- Waarvandaan vertrekken de fotonen van de uitbarstingen voor waarnemer A?
- Waarvandaan vertrekken de fotonen van de uitbarstingen voor waarnemer C?
- Beweegt waarnemer A volgens waarnemer C naar de achterste brandvlek op de raket toe of beweegt waarnemer A van de achterste raketbrandvlek weg?

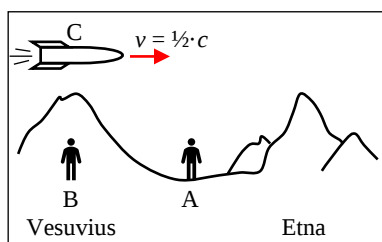
Waarnemer A ontvangt de fotonen gelijktijdig. Daar moet iedereen het over eens zijn.

- c** Leg met je antwoorden op de drie vragen bij **b** uit of de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit' *voor*, *na* of *tegelijkertijd* met de gebeurtenis 'Etna barst uit' plaatsvindt volgens waarnemer C.

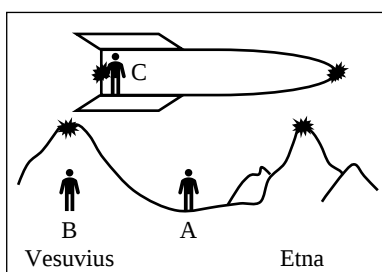
Een andere manier om te beredeneren of voor waarnemer C de gebeurtenis 'Vesuvius barst uit' *voor*, *na* of *tegelijkertijd* met de gebeurtenis 'Etna barst uit' plaatsvindt, is met een waarnemer D in het midden van de raket zoals in figuur 38.

- d** Geef antwoord op de volgende vijf vragen:

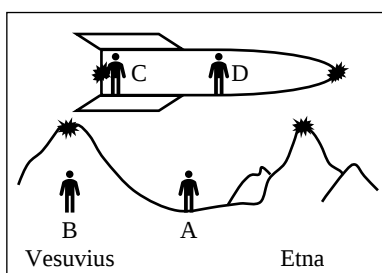
- Moeten de waarnemers C en D het eens zijn over gelijktijdigheid? Leg uit.
- Waarvandaan vertrekken de fotonen van de uitbarstingen voor waarnemer A?
- Welk golffront zal waarnemer D eerder bereiken: het golffront van de Vesuvius of het golffront van de Etna? Leg uit.
- Waarvandaan vertrekken de fotonen van de uitbarstingen voor waarnemer D?
- Verandert de afstand van waarnemer D tot die punten uit de vorige



Figuur 36



Figuur 37



Figuur 38

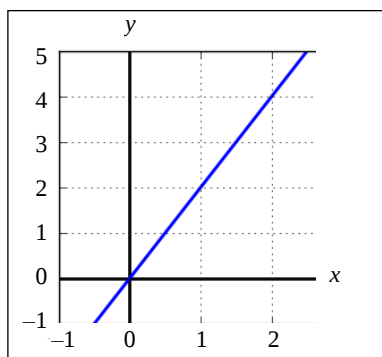
vraag?

- e Leg met je antwoorden op de vijf vragen bij d uit of de gebeurtenis ‘Vesuvius barst uit’ voor, na of tegelijkertijd met de gebeurtenis ‘Etna barst uit’ plaatsvindt volgens waarnemer C.

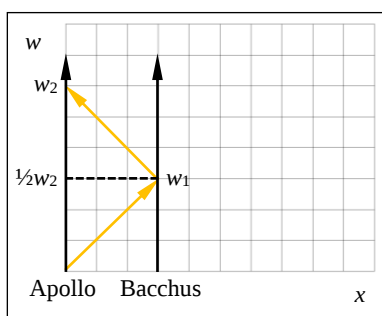
Klokken synchroniseren

Leerdoelen

- Je kunt met een voorbeeld uitleggen wat het betekent als twee klokken gesynchroniseerd zijn.
- Je kunt uitleggen hoe twee waarnemers die niet ten opzichte van elkaar bewegen hun klokken gelijk kunnen zetten met een lichtsignaal (het zogeheten kloksynchronisatie-experiment), ondersteund met een voorbeeld van twee waarnemers die 4 ls van elkaar verwijderd zijn.
- Je kunt uitleggen waardoor het onmogelijk is te weten wat er nu gebeurt op de dichtstbijzijnde ster (Alpha Centauri op 4,4 lichtjaar van de aarde).
- Je kunt uitleggen waardoor klokken die zich zeer ver van elkaar bewegen niet net zo gemakkelijk gesynchroniseerd kunnen worden als de klokken die voor jou op tafel liggen, en dat verre klokken gelijk moeten worden gezet via een procedure (bijvoorbeeld het kloksynchronisatie-experiment).
- Je kunt uitleggen dat er een verschil is tussen de gebeurtenis ‘maan ontploft’ en de gebeurtenis ‘lichtsignaal van maanontploffing bereikt waarnemer op aarde’.
- Je kunt uitleggen dat het kloksynchronisatie-experiment voor waarnemers die ten opzichte van elkaar stilstaan niet anders mag zijn dan voor waarnemers die met een constante snelheid bewegen.
- Je kunt het kloksynchronisatie-experiment tekenen in een ruimtetijd diagram voor waarnemers die ten opzichte van elkaar stilstaan, waarbij de waarnemers worden weergegeven door verticale wereldlijnen.
- Je kunt het kloksynchronisatie-experiment tekenen in een ruimtetijd diagram voor waarnemers die ten opzichte van elkaar stilstaan en bewegen ten opzichte van een derde stilstaande waarnemer, waarbij de stilstaande waarnemer wordt weergegeven door een verticale wereldlijn.



Figuur 39



Figuur 40 – Klokken gelijkzetten (synchroniseren).

27 In figuur 39 zie je als voorbeeld de vergelijking $y = 2x$ in een x,y -diagram.

- a Wat is de vergelijking van de tijd-as (w -as) in figuur 39?
b Wat is de vergelijking van de x -as?

De zwarte streeplijn in figuur 40 staat per definitie voor de lijn die dezelfde tijd markeert voor Apollo en Bacchus. Alle lijnen die hieraan evenwijdig lopen, moeten ook lijnen zijn van hetzelfde tijdstip, net als de lijn evenwijdig aan de streeplijn die door de oorsprong gaat (dit is de x -as).

- c Stel dat we (foutief) zouden aannemen dat twee gelijkheidslijnen niet evenwijdig lopen, maar elkaar snijden. Leg uit waarom dit onmogelijk is.

28 Apollo en Bacchus maken de afspraak hun klokken op de volgende manier gelijk te zetten:

- Apollo zendt een lichtsignaal naar Bacchus op tijdstip $t_A = 12 \text{ h } 0 \text{ m } 0 \text{ s}$.
- Bacchus ontvangt het signaal en zendt het onmiddellijk terug naar A op tijdstip $t_B = 12 \text{ h } 0 \text{ m } 0 \text{ s}$.

Dit is weergegeven in het ruimtetijd diagram van figuur 40. De hokjes in dit diagram hebben een hoogte en breedte van 1 ls.

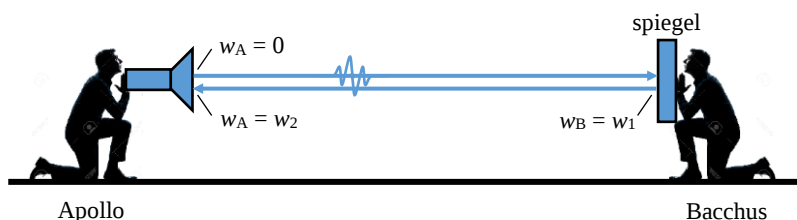
- a Wat wijst de klok van Apollo aan als hij het door Bacchus teruggekaatste signaal ontvangt?

Apollo en Bacchus hadden afgesproken dat Apollo na ontvangst van het door Bacchus gezonden signaal zijn klok zo zou instellen dat die hetzelfde aanwijst als de klok van Bacchus.

- b Hoe moet Apollo zijn klok dan verzetten?

Klokken synchroniseren

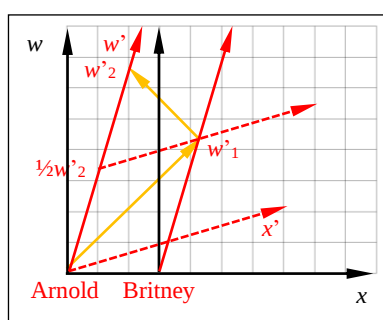
Einstein ziet kloksynchronisatie als een experiment met een signaal dat met de lichtsnelheid gaat. We kiezen de lichtsnelheid, omdat dit de enige snelheid is waarover iedereen het eens is. Een mogelijk experiment tussen twee waarnemers die ten opzichte van elkaar stilstaan gaat als volgt: Waarnemer A zendt een foton uit en waarnemer B kaatst het terug (zie figuur 41). Het foton moet dezelfde afstand afleggen op de heen- en de terugweg, en de lichtsnelheid is in alle richtingen gelijk. Dus kost het voor het foton evenveel tijd om heen te gaan als om terug te gaan. Een lichtsignaal kan afkomstig zijn van een klok. Een beeld dat kan helpen is het licht van de klok te zien als een serie foto's die op jouw oog afgevuurd wordt. Waarnemer B kan dus een tijd zien, neemt deze tijd over van A, en A zet de klok $t = x/c$ terug (waarbij x hun onderlinge afstand is).



Figuur 41

Met dit experiment vinden we de in figuur 40 gestreept getekende gelijktijdigheidslijn. Alle andere gelijktijdigheidslijnen lopen evenwijdig aan deze lijn. Want: als gelijktijdigheidslijnen niet evenwijdig zouden lopen, zouden ze snijden en dan zou je op één plaats x twee tijden hebben – en dat kan niet. Dit lijkt geen nieuwe kennis: we wisten al dat alle punten op de streeplijn plaatsvinden op het tijdstip $t = 3$ s. Het gaat om het feit dat we kloksynchronisatie als experiment kunnen zien. Het eerste postulaat vertelt ons dat waarnemers in een supersnelle trein die ten opzichte van elkaar stilzitten bij dit experiment dezelfde uitkomst moeten krijgen (bij gelijke onderlinge afstand en gelijke begintijd).

Als twee klokken gesynchroniseerd zijn, betekent dit dat ze exact gelijk lopen. Als jij door jouw supervereijker naar een verre klok kijkt, heeft het licht dat van die klok vertrekt tijd nodig om jou te bereiken. Denk na over het licht van de klok als een serie foto's die op jou afgevuurd wordt. Beschouw een klok op 300.000 km afstand van jou. Het licht (de 'foto') dat om 11 h 59 m 59 s verzonden is, zal precies één seconde later bij jouw oog aankomen. De klok naast jou geeft op het moment dat dit licht jou bereikt precies 12.00 uur aan.



Figuur 42 – Arnold doet waarnemingen met zijn rode tijd-as (w') en plaats-as (x'). Een stilstaande waarnemer die op $w = 0$ s buiten staat op het perron als Arnold in de trein langs komt, doet waarnemingen langs zijn zwarte tijd-as (w) en plaats-as (x). Er is ook een wereldlijn getekend van een stilstaande waarnemer die buiten staat op het perron als Britney langs komt op $w = 0$ s.

- 29 Gesynchroniseerde klokken staan op een rechte lijn opgesteld, ieder 1 miljoen km van elkaar. Met een supervereijker kun je op alle klokken kijken.

De klok naast jou wijst 12.00 uur 's middags aan.

- Welke tijd zie je op de 90ste klok op de rij?
- Is je antwoord op vraag a in strijd of juist in overeenstemming met het feit dat alle klokken gesynchroniseerd zijn?

- 30 Sander kijkt met een supervereijker naar een klok op de planeet Mars, die een afstand van 78 miljoen km van ons verwijderd is. Sanders polshorloge geeft 23.00 uur aan. Ziet Sander op de Marsklok dezelfde tijd als op zijn eigen polshorloge, als de klokken gesynchroniseerd zijn?

- 31 Het experiment van Apollo en Bacchus uit opgave 28 wordt uitgevoerd door Arnold en Britney in een met grote snelheid rijdende trein: zie het ruimtetijd-diagram van figuur 42.

- Bepaal de snelheid van Arnold. Leg uit ten opzichte waarvan die snelheid wordt bepaald.
- De gele lijnen staan loodrecht op elkaar. Is dit altijd het geval bij de wereldlijnen van lichtsignalen die zich in tegengestelde richting voortplanten? Licht toe.

Het eerste gele lijnstuk tussen 'Arnold' en w'_1 is veel langer dan het tweede gele lijnstuk tussen w'_1 en w'_2 .

- Kun je daarom zeggen dat "de afstand die het licht in het eerste stuk aflegt

groter is dan in het tweede stuk”? Beantwoord deze vraag eerst voor de stilstaande waarnemer op het perron en dan voor Arnold en Britney in de trein.

- d Mag je, op dezelfde manier, zeggen dat het licht in het eerste stuk langere tijd onderweg is dan in het tweede stuk? Beantwoord deze vraag eerst voor Arnold en Britney in de trein en dan voor een stilstaande waarnemer op het perron.

Britney doet hetzelfde als Arnold: op haar tijdstip 0 zendt zij een lichtsignaal 3 naar Arnold, die na ontvangst onmiddellijk een signaal 4 terugzendt.

- e Teken deze signalen in figuur 42. Bedenk eerst in welk punt Britney zich volgens Arnold op $t = 0$ bevindt.

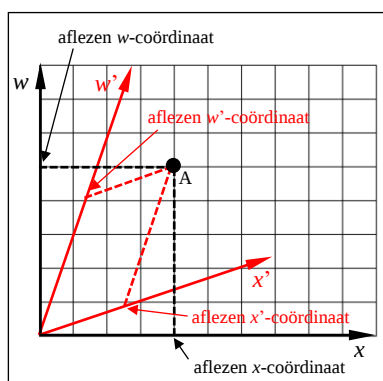
Leerdoelen

- Je kunt ruimte- en tijdcoördinaten x en w aflezen in een ruimtetijd diagram.
- Je kunt in een ruimtetijd diagram laten zien dat twee gebeurtenissen die gelijktijdig plaatsvinden in stelsel A niet gelijktijdig zijn in een stelsel B dat met constante snelheid beweegt ten opzichte van stelsel A.

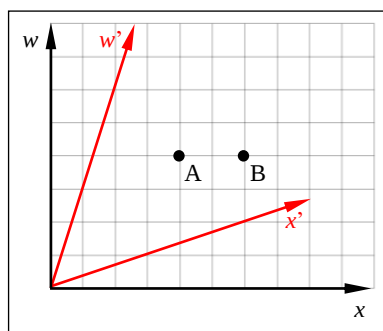
Tijdsvolgorde

Het ruimtetijd diagram is voor het bepalen van de tijdvolgorde van gebeurtenissen een krachtig hulpmiddel. Het aflezen van plaats en tijdstip in het bewegende rode stelsel van figuur 43 vraagt dat we nauwkeurig kijken naar het aflezen van coördinaten in het zwarte stelsel, iets dat moeiteloos gaat. We gebruiken dezelfde procedure in het rode stelsel.

- Ruimtecoördinaat: teken een lijn door de gebeurtenis, evenwijdig aan de tijd-as van het coördinatenstelsel waaruit je de waarneming wilt doen en lees de positie x af waar deze lijn de ruimte-as snijdt.
- Tijdcoördinaat: teken een lijn door de gebeurtenis, die evenwijdig loopt aan de ruimte-as van het coördinatenstelsel waaruit je de waarneming wilt doen en lees de tijd t af waar deze lijn de tijd-as snijdt.



Figuur 43



Figuur 44

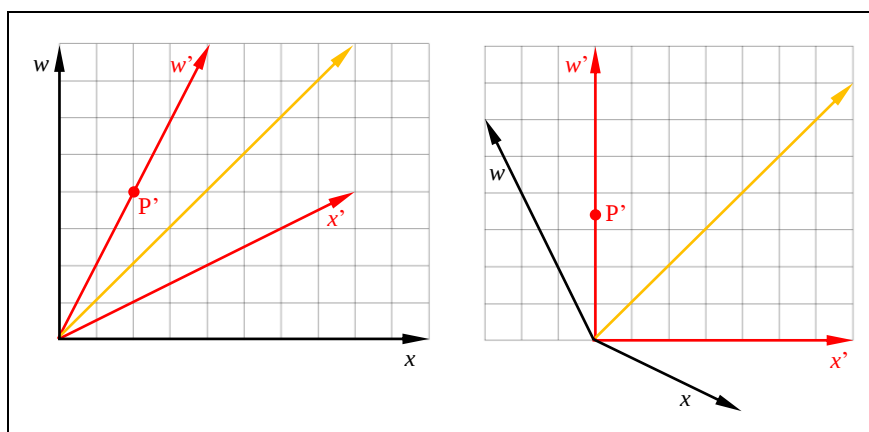
- 32 In figuur 44 zijn twee stelsels getekend: een zwart en een rood stelsel. De gebeurtenissen A en B zijn gelijktijdig in het zwarte stelsel. Laat zien dat de gebeurtenissen in het rode stelsel niet gelijktijdig zijn.

- 33 In figuur 45 links zijn twee stelsels getekend: een zwart en een rood stelsel.

- a Geef in figuur 45 links de zwarte coördinaten van P' aan.

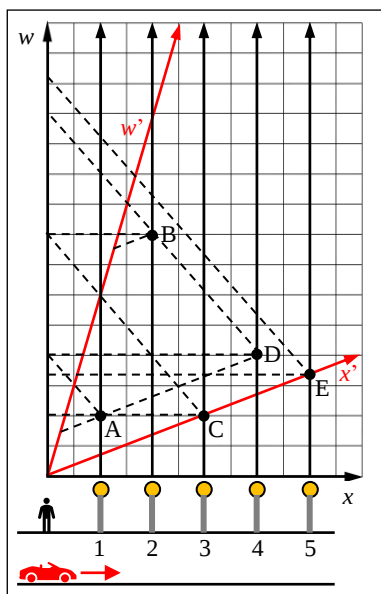
Dezelfde situatie is nogmaals getekend in figuur 45 rechts. Nu wordt de rode waarnemer als stilstaand opgevat.

- b Geef in figuur 45 rechts de coördinaten van P' in het zwarte stelsel aan.

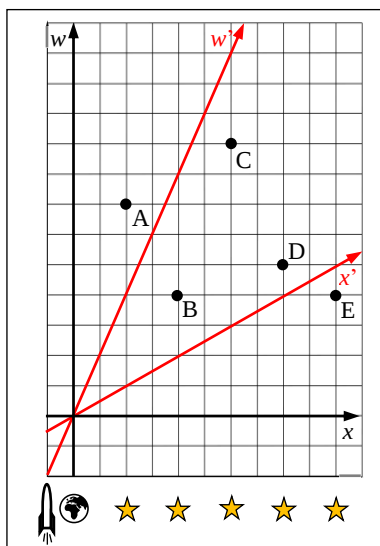


Figuur 45

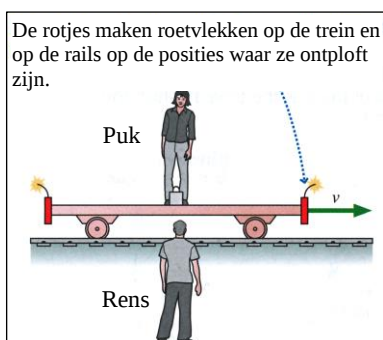
- 34 Vijf lantaarnpalen 1 t/m 5 staan op gelijke afstand in een rechte lijn langs de x -as, zoals in figuur 46 (onder). De lampen gaan aan op de punten A, B, C, D en E in het ruimtetijd diagram van figuur 46 (boven). Twee waarnemers



Figuur 46



Figuur 47



Figuur 48

doen metingen. Er zijn gestippelde hulplijnen getekend.

Een stilstaande waarnemer staat in de oorsprong. Hij staat stil ten opzichte van de lantaarnpalen en doet metingen langs de x -as en de w -as.

- In welke volgorde gaan de lampen aan volgens de stilstaande waarnemer?
 - In welke volgorde bereikt het licht van de lampen de stilstaande waarnemer?
- Een tweede waarnemer zit in een auto zoals in figuur 46 (onder) die met een snelheid $v = \frac{1}{3}c$ naar rechts beweegt. Hij doet waarnemingen langs de x' -as en de w' -as.
- In welke volgorde gaan de lampen aan volgens de waarnemer in de auto?
 - In welke volgorde bereikt het licht van de lampen de waarnemer in de auto?
 - Waar is de auto, als het licht van lantaarnpaal 4 de auto bereikt?

- 35 In het ruimtetijd diagram van figuur 47 zie je vijf sterren op gelijke afstand in een rechte lijn langs de x -as. De sterren gaan supernova (ze ontploffen) op de ruimtetijdpunten A, B, C, D en E. Deze supernova's worden waargenomen door een sterrenkundige op aarde en ook door een wetenschapper aan boord van een zeer snelle raket. Van de aarde en de raket zijn de wereldlijnen getekend.

De sterrenkundige op aarde staat in de oorsprong. Deze staat stil ten opzichte van de sterren en doet metingen langs de x -as en de w -as.

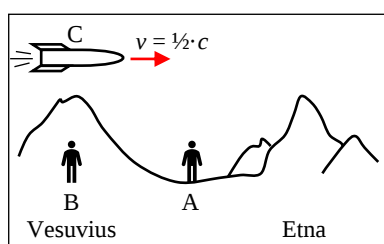
- In welke tijdvolgorde ontploffen de sterren volgens de sterrenkundige op aarde?
 - In welke tijdvolgorde ziet de sterrenkundige op aarde het licht van de ontploffingen?
- De wetenschapper in de raket beweegt met een snelheid $v = \frac{1}{2}c$ naar rechts. Deze doet waarnemingen langs de x' -as en de w' -as.
- In welke tijdvolgorde ontploffen de sterren volgens de wetenschapper in de raket?
 - In welke tijdvolgorde ziet de wetenschapper in de raket het licht van de ontploffingen?
 - Is de tijdsvolgorde waarin de supernova's A en B ontploffen dezelfde in alle coördinatenstelsels? Leg uit.
 - Is de tijdsvolgorde waarin de supernova's A en D ontploffen dezelfde in alle coördinatenstelsels? Leg uit.

- 36 We gaan de treinparadox van opgave 21 t/m 25 ook met een ruimtetijd diagram bestuderen. Stel de trein rijdt langs met een snelheid $v = 0,3c$ ten opzichte van Rens (en de grond). Puk staat in het midden van de trein, en op het moment dat Puk en Rens elkaar passeren (zoals weergegeven in figuur 48) gaan de twee rotjes af. De rotjes produceren elk een lichtflits. De trein beweegt naar rechts en heeft een lengte van 1,8 miljoen km (6 ls). We noemen het stelsel van Rens het stilstaande stelsel. Volgens Rens ontploffen de rotjes tegelijkertijd op $w = 0$, precies op het moment dat hij Puk passeert. Rens staat op dat moment op $x = 3$ ls.

- Teken in een ruimtetijd diagram (op ruitjespapier van minstens 14 bij 14 hokjes) de volgende wereldlijnen:
 - de wereldlijn van Rens,
 - de wereldlijn van de voorkant van de trein,
 - de wereldlijn van de achterkant van de trein,
 - de wereldlijn van het midden van de trein (de wereldlijn van Puk),
 - de wereldlijn van de linker roetvlek op de rails,
 - de wereldlijn van de rechter roetvlek op de rails,
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van het achterste rotje,
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van het voorste rotje.
- Op welk tijdstip neemt Rens de fotonen waar?
- Neemt Puk de fotonen tegelijkertijd waar? Zo ja, geef deze gebeurtenis dan aan in je ruimtetijd diagram. Zo niet, geef dan de twee tijdstippen aan waarop Puk de fotonen waarneemt in je ruimtetijd diagram.
- Kunnen de rotjes tegelijkertijd ontploft zijn volgens Puk?

We namen eerst aan dat de rotjes tegelijkertijd ontploften in het stelsel van Rens. Nu nemen we aan dat de rotjes tegelijkertijd ontploften in het stelsel van Puk.

- e Teken x' -as van Puk.
- f Geef aan waar de voorkant van de trein volgens Puk is op $w' = 0$.
- g Geef aan waar de achterkant van de trein volgens Puk is op $w' = 0$.
- h Teken in je ruimtetijd-diagram de volgende wereldlijnen:
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van het achterste rotje (in Puk's stelsel),
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van het voorste rotje (in Puk's stelsel).
- i Leg met je ruimtetijd-diagram uit of Puk kan concluderen of de rotjes tegelijkertijd zijn ontploft.
- j Leg met je ruimtetijd-diagram uit of Rens het eens is met Puk.



Figuur 49

- 37 We gaan de uitbarstingen van de Vesuvius en de Etna van opgave 26 ook met een ruimtetijd-diagram bestuderen. De twee vulkanen liggen 6 ls ($1,8 \cdot 10^6$ km) van elkaar, en barsten in het stelsel van waarnemer A in het midden tussen de vulkanen tegelijkertijd uit. Waarnemer B staat stil aan de voet van de Vesuvius.

De raket beweegt met een snelheid $v = \frac{1}{2} \cdot c$ ten opzichte van de grond, zoals in figuur 49. Op het moment dat de Vesuvius uitbarst, vliegt de raket er precies boven, dus ontvangt de raket het licht van de uitbarsting van de Vesuvius direct.

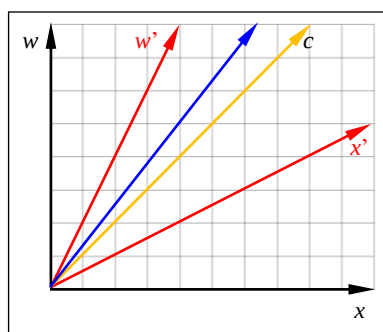
De vraag is of de gebeurtenis ‘Vesuvius barst uit’ voor, na of tegelijkertijd met de gebeurtenis ‘Etna barst uit’ plaatsvindt volgens waarnemer C.

- a Beantwoord deze vraag door het tekenen van een ruimtetijd-diagram (op ruitjespapier van minstens 14 bij 14 hokjes), met daarin in ieder geval:
 - de wereldlijnen van (het midden van) de Vesuvius, van (het midden van) de Etna, van waarnemer A, van waarnemer B en van de raket,
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van de Vesuvius,
 - de wereldlijn van een foton afkomstig van de Etna.
 Trek een conclusie (het antwoord op de vraag) op grond van je ruimtetijd-diagram.
- b Beantwoord dezelfde vraag door het tekenen van een ruimtetijd-diagram (op ruitjespapier van minstens 14 bij 14 hokjes), nu met de raket als het ‘rechte’ stelsel. Trek een conclusie (het antwoord op de vraag) op grond van je ruimtetijd-diagram.

Relativistische snelheden optellen

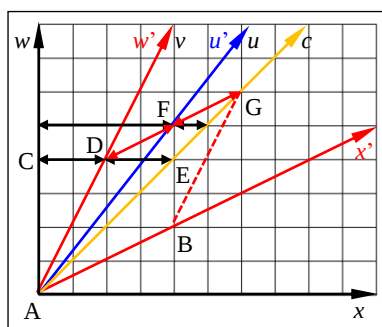
Leerdoelen

- Je kunt relativistische snelheden bij elkaar optellen.



Figuur 50

- 38 In figuur 50 vormen de rechte assen (zwart) het grondstelsel en de schuine assen (rood) het treinstelsel. In de trein rent een meisje, weergegeven door de blauwe wereldlijn. Ook de wereldlijn van een foton is getekend. Bepaal met behulp van figuur 50 de snelheid van de trein en het meisje in beide stelsels (je geeft dus vier getallen), uitgedrukt in de lichtsnelheid c .
- 39 In figuur 51 heeft een aantal ruimtetijdpunten uit figuur 50 een naam (A t/m G) gekregen. Hieronder volgt een aantal vragen in de trant van “Wat is de betekenis van de lengte van het lijnstuk CD in het zwarte (rechte) stelsel?”, met als bedoeld antwoord: “Het is de verplaatsing van de trein in het zwarte stelsel, gedurende 4 zwarte tijdseenheden.”
- a Wat is de betekenis van de lengte van CE in het zwarte stelsel?
 - b Wat is de betekenis van de lengte van DE in het zwarte stelsel?
 - c Wat is de betekenis van de lengte van AD in het rode (schuine) stelsel?



- d** Wat is de betekenis van de verhouding CD/AC ?
- e** Noem een lijnstuk in het rode stelsel dat dezelfde betekenis heeft als CE in het zwarte stelsel.
- f** Is er een lijnstuk, en zo ja welk, aan te wijzen dat in het rode stelsel dezelfde betekenis heeft als CD in het zwarte stelsel?
- g** Welk lijnstuk in het zwarte stelsel heeft dezelfde betekenis als AG in het rode stelsel?
- De blauwe lijn, die de beweging van de hardlooper in het zwarte stelsel aangeeft, verdeelt lijnstuk DG in twee gelijke delen DF en FG .
- h** Wat is de betekenis van de lengte DG in het rode stelsel?
- i** Waarom geldt: $DF = FG$?
- De hardlooper besluit van looprichting om te draaien (nieuwe snelheid $v = -0,5 \cdot c$ ten opzichte van de trein). In het ruimtetijdpunt F keert zij van bewegingsrichting om.
- j** Teken haar wereldlijn. Wat merk je op?

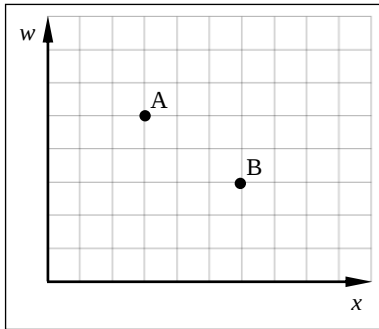
40 Drie bankrovers zijn met hun buit op de vlucht voor de politie (figuur 52). Hun vluchtauto gaat met een snelheid $v = 0,75 \cdot c$. De politieauto gaat maar met een snelheid $v = 0,5 \cdot c$. Deze beide snelheden worden gemeten ten opzichte van de grond. Een agent vuurt een kogel af met een snelheid $v = 0,33 \cdot c$. Deze laatste snelheid is gemeten ten opzichte van de politieauto.

snelheid meisje t.o.v. de rails
 snelheid meisje t.o.v. de trein
 snelheid trein t.o.v. de rails

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

snelheid van $\rightarrow$ ten opzichte van $\downarrow$	grond	politie	boeven	kogel	ontsnappen ze?
grond	0	$0,5 \cdot c$	$0,75 \cdot c$		
politie				$0,33 \cdot c$	
boeven					
kogel					

- 41** Beantwoord de volgende vragen met de formule uit figuur 53 voor het optellen van relativistische snelheden.
- a** Leg uit dat voor snelheden veel kleiner dan c de formule overgaat in $u = u' + v$.
Stel we vuren een foton af in de trein. Het foton (meisje) ‘rent’ dan dus met de lichtsnelheid $v = c$ in de trein.
 - b** Substitueer $v = c$ in de formule en laat zien dat in dat geval $u = c$.
- 42** In het ruimtetijd diagram van figuur 54 zijn drie gebeurtenissen A, B en C getekend.
- a** Laat zien welke van de gebeurtenissen A, B en C invloed op elkaar kunnen hebben gehad en welke niet.
 - b** Teken een gebeurtenis die veroorzaakt wordt door twee lichtstralen vanuit A



Figuur 55 – Causaal verband?

- en C.
- c Is er een gebeurtenis D mogelijk die wel door A kan worden beïnvloed, maar niet door B? Zo ja, teken deze gebeurtenis in het ruimtetijd diagram.
- 43 In het ruimtetijd diagram van figuur 55 zijn twee gebeurtenissen A en B getekend, die voor een zwarte waarnemer niet gelijktijdig zijn.
- a Teken een stelsel waarin de gebeurtenissen A en B wel gelijktijdig plaatsvinden.
- b Bepaal de snelheid van dit stelsel.
- c Leg nu uit dat tussen de gebeurtenissen B en A geen causaal verband kan bestaan.

Tijdrek

Leerdoelen

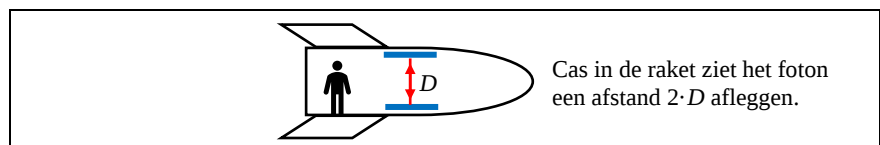
- Je kunt met een voorbeeld uitleggen dat bij twee inertiaalsystemen die ten opzichte van elkaar bewegen voor een waarnemer in het ene systeem de klok in het andere systeem trager loopt: tijdrek.
- Je kunt uitleggen dat de tijdrek afhangt van de onderlinge snelheid van beide inertiaalsystemen.

Lichtklok

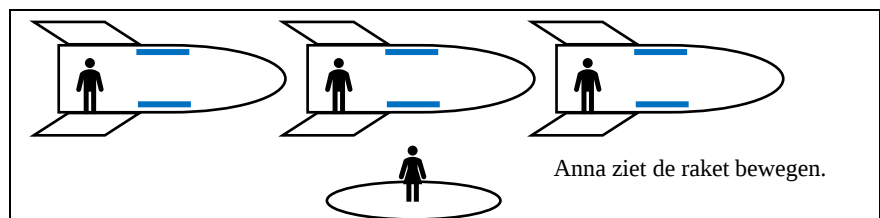
Einstein stelde zich de volgende vraag: “Lopen de klokken in verschillende stelsels wel even snel?” Of, met andere woorden: duurt één seconde in het (stilstaande) zwarte stelsel even lang als één seconde in het (bewegende) rode stelsel?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden dacht Einstein na over wat een klok precies is: een periodiek verschijnsel, iets dat zich in de tijd herhaalt. Een secondewijzer gedraagt zich als klok, maar we kunnen ook iets anders nemen wat zich in de tijd herhaalt. Einstein kwam met de zogeheten *lichtklok*. Dit is een foton dat tussen twee spiegels heen en weer blijft gaan. Als het foton van de ene naar de andere spiegel heeft bewogen, noemen we dit één ‘tik’ op de lichtklok.

- 44 In de raket van figuur 56 heeft Cas een lichtklok. In de figuur zien we de waarneming van Cas in de raket: het foton gaat één keer verticaal op en neer. Anna staat op aarde en ziet de raket naar rechts bewegen, zoals in figuur 57. Ook voor Anna gaat het foton één keer heen en weer tussen de spiegels.
- a Schets het pad van het foton dat Anna waarneemt in figuur 57.



Figuur 56 – Het stelsel van Cas.

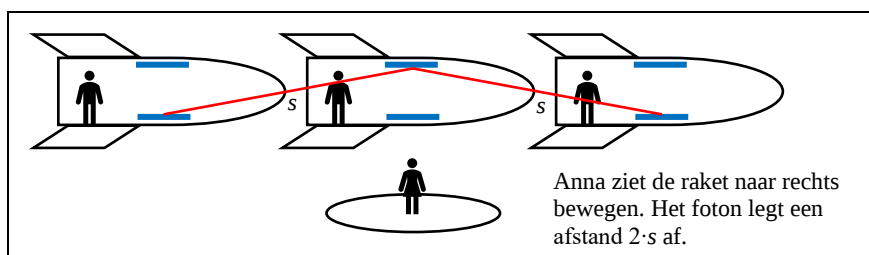


Figuur 57 – Het stelsel van Anna.

Terwijl het foton van de onderste naar de bovenste spiegel gaat, ziet Anna het foton de afstand s afleggen (zie figuur 58), en ziet Cas het foton de afstand D afleggen.

Anna en Cas meten beide de tijd die het foton erover doet om van de onderste naar de bovenste spiegel te gaan.

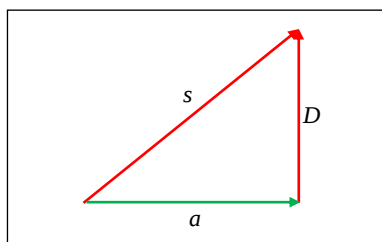
- b Welke uitspraak is waar? (Omcirkel het juiste antwoord, en leg uit.)
- A Anna en Cas meten dezelfde tijdsduur.
 - B Anna meet een langere tijdsduur dan Cas.
 - C Anna meet een kortere tijdsduur dan Cas.



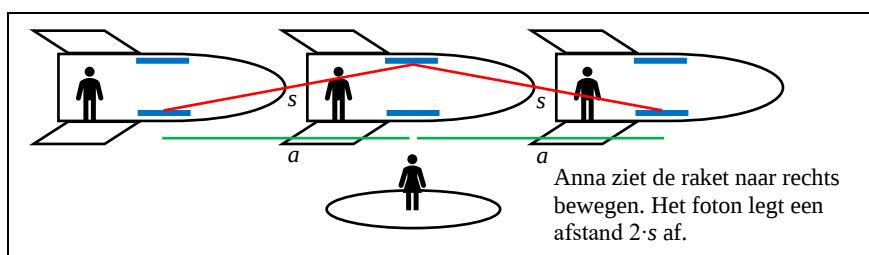
Figuur 58 – Het stelsel van Anna.

Terwijl het foton een afstand s aflegt van de onderste naar de bovenste spiegel, is de raket voor Anna een afstand a naar rechts bewogen, zoals in figuur 59. We kunnen de afstanden s , D en a in een (rechthoekige) driehoek weergeven: zie figuur 60.

- c Schets een soortgelijke driehoek voor een raket die een stuk sneller gaat.
- d Tikt de lichtklok in de snellere raket volgens Anna nu sneller, trager of op dezelfde manier als bij de langzamere raket? Leg uit.
- e Merkt Cas dat zijn lichtklok in de snellere raket trager, sneller of even snel tikt? Leg uit.



Figuur 60



Figuur 59 – Het stelsel van Anna.

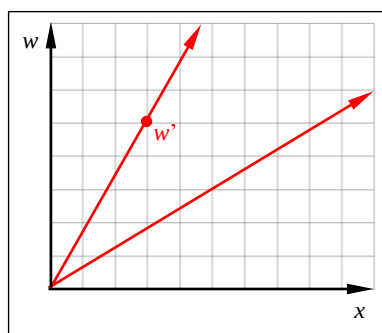
We noemen de tijd die Cas meet op zijn lichtklok t_{raket} , en de tijd die Anna meet t_{aarde} .

- f Schrijf drie vergelijkingen op voor D , s en a . Gebruik de formule $x = v \cdot t$.

45 Een astronoute zit in een raket met een snelheid $v = 0,5 \cdot c$ ten opzichte van de aarde. Ze verliest 120 s het radiocontact. Hoe lang denkt de controletoren op aarde dat er geen radiocontact was?

46 Bij de tijdwaarnemingen in de relativiteitstheorie speelt de factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ een belangrijke rol.

- a Wat is de kleinste waarde van deze factor?
 - b Wat is de grootste waarde van deze factor?
 - c Wat geldt er altijd voor t en t' ? (Omcirkel het juiste antwoord.)
- A $t < t'$
 - B $t \leq t'$
 - C $t > t'$
 - D $t \geq t'$

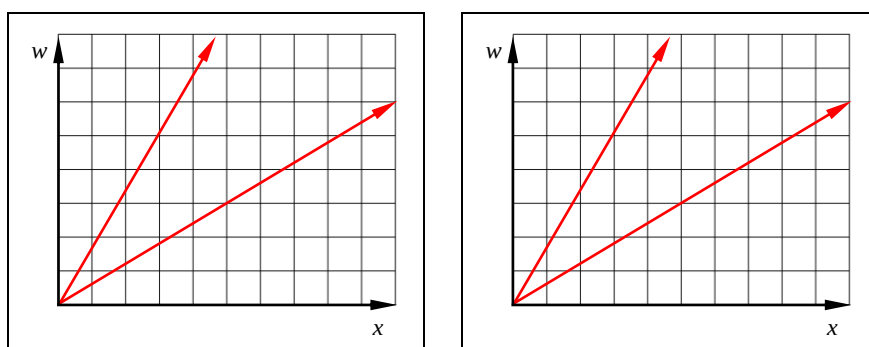


Figuur 61

47 In het ruimtetijd-diagram van figuur 61 zie je een rode waarnemer die beweegt ten opzichte van een zwarte waarnemer. Je ziet een stip w' . Dit is een tijdstip op het rode horloge.

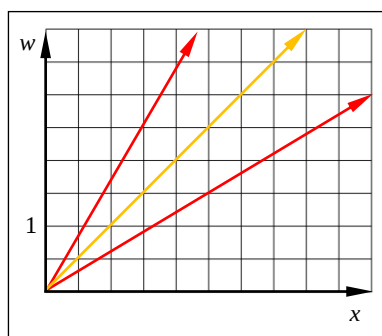
- a Teken in figuur 61 tijdstip w op het zwarte horloge dat volgens de zwarte waarnemer gelijktijdig is met w' .
- b Teken in figuur 61 tijdstip w^* op het zwarte horloge dat volgens de rode waarnemer gelijktijdig is met w' .

- 48 De halveringstijd van een radioactieve stof is 5 s, gemeten door iemand die stilstaat ten opzichte van de stof. De stof gaat eerst mee met een trein met een snelheid $v = 0,6 \cdot c$ ten opzichte van de rails.
- Na hoeveel tijd is de helft van de stof vervallen volgens een waarnemer langs de rails?
 - Teken het tijdstip 5 s en de tijd die je bij vraag a hebt berekend in het linker ruimtetijd diagram van figuur 62.
- Nu laten we de radioactieve stof langs de rails liggen. De trein raast weer langs met een snelheid $v = 0,6 \cdot c$.
- Na hoeveel tijd is de helft van de stof vervallen volgens een waarnemer in de trein?
 - Teken het tijdstip 5 s en de tijd die je bij vraag c hebt berekend in het rechter ruimtetijd diagram van figuur 62.



Figuur 62 – Ruimtetijd diagram waarin de radioactieve stof met de trein meegaat (links) en langs de rails blijft liggen (rechts).

- 49 Welke van de volgende zaken is een klok: a) een horloge, b) een lichtklok, c) de zon, d) een waterval die steen laat afslijten, e) jouw hartslag, f) jouw nagels groeien. Leg uit.
- 50 De volgende vragen gaan over het verschijnsel tijdrek.
- Als je in een snelle raket weg van de aarde vliegt, zou je dan merken dat je polsslag een andere frequentie heeft?
 - Dat een Aardse waarnemer de tijd in een raket langzamer ziet lopen, is dat schijn of werkelijkheid?
 - Als een ruimteschip bij de start een lichtsignaal geeft, en daarna gedurende een uur, gemeten op de klok in het ruimteschip, elke zes minuten weer één, hoeveel lichtsignalen zal het dan uitzenden?
- De klok van een persoon die ten opzichte van jou beweegt, loopt langzamer volgens $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$.
- Als de klok een knipperlicht heeft, knippert dat dan volgens jou met een andere frequentie dan volgens de reiziger in de raket?
 - Maakt het bij vraag d uit of de klok naar je toe beweegt of van je af?



Figuur 63 – De rode tijd-as indelen.

- 51 Jij houdt ervan dat jouw ei precies 6 minuten gekookt wordt. Je stapt in een ruimteschip met een snelheid in de orde van de lichtsnelheid. Moet je je ei in het ruimteschip, als je dat meet op de klok van het ruimteschip, korter dan, langer dan of precies 6 minuten koken? Leg uit.
- 52 In figuur 63 is een zwart en een rood stelsel getekend. Van het zwarte stelsel is het punt $w = 1$ vermeld.
- Bereken de waarde van w' , als $w = 1$.
 - Geef met stippen de punten aan met x' -coördinaat $x' = 0$ en $w' = 1, 2, 3$.
- 53 Op aarde woont een tweeling, Alice en Charlotte. Bob is even oud, maar woont op een planeet bij een ver weg gelegen ster. Neem aan dat de aarde en de andere planeet ten opzichte van elkaar in rust zijn. Alice besluit op haar

21^e verjaardag bij Bob langs te gaan. Omdat ze niet veel tijd heeft, neemt ze een snelle raket. Reizend met snelheid $v = 0,8 \cdot c$ overbrugt zij de afstand van 4 lichtjaar in relatief korte tijd.

- a Hoe oud is Bob als Alice bij hem arriveert?
- b Hoe oud is Alice op dat moment?

Na een jaar bij Bob doorgebracht te hebben reist Alice terug.

- c Hoe oud zijn Alice en Charlotte als zij weer verenigd worden?
Bij vraag **b** maak je gebruik van de formule $t' = t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$. In de 5 jaar reistijd die je verwacht, gebruik makend van de wetten van Newton, wordt Alice slechts 3 jaar ouder. Het licht doet over de overbrugde afstand 4 jaar.
- d Dat een afstand van 4 lichtjaar door Alice in 3 jaar kan worden afgelegd, is dat niet in tegenspraak met het gegeven dat niets sneller kan dan het licht?

54 Op het tijdstip $w' = w = 0$ stap je in een raket die vanaf de aarde met een snelheid $v = 0,6 \cdot c$ op reis gaat naar een planeet die stil staat ten opzichte van de aarde op 3 lichtjaar afstand. Gebruik voor deze opgave een leeg ruimtetijd diagram.

- a Teken de wereldlijn van de aarde, de raket en de planeet. Teken ook het assenstelsel (w' -as en x' -as) van het raket-stelsel.
- b Het tijdstip w_A is het tijdstip dat op de aardeklok gelijktijdig is met de aankomst op de planeet volgens een waarnemer op aarde. Teken w_A in het ruimtetijd diagram.
- c Het tijdstip w_B is het tijdstip dat op de aardeklok gelijktijdig is met de aankomst op de planeet volgens een waarnemer in de raket. Teken w_B in het ruimtetijd diagram.

Je zus is op aarde achtergebleven en meet hoe lang jouw reis duurt op een klok op aarde.

- d Laat met een berekening zien dat de reis volgens je zus 5 jaar duurt.
- e Jij houdt ook bij hoe lang jouw reis duurt op een klok in de raket. Laat met een berekening zien dat de reis volgens jou 4 jaar duurt.
- f Hoe lang heeft de reis volgens jou geduurd, als je dat afleest op een klok op aarde? Laat dat zien met een berekening.
- g Het tijdstip w'_C is het tijdstip op de raketklok waarop je 3 jaar onderweg was volgens jou in de raket. Teken w'_C in het ruimtetijd diagram.

Je stapt uit op die planeet en houdt daar twee jaar vakantie. Vervolgens reis je terug naar aarde, weer met dezelfde snelheid $v = 0,6 \cdot c$. Bij je vertrek was je zus één jaar jonger dan jij.

- h Toon met een berekening en enige uitleg aan of jij bij je terugkomst op aarde ouder of jonger bent dan je zus.

Lengtekrimp

Leerdoelen

- Je kunt met een voorbeeld uitleggen dat bij twee inertiaalsystemen die ten opzichte van elkaar bewegen voor een waarnemer in het ene systeem alle lengtes in het andere systeem in de bewegingsrichting korter zijn: lengtekrimp.
- Je kunt uitleggen dat de lengtekrimp afhangt van de onderlinge snelheid van beide inertiaalsystemen.

Trein-en-tunnelparadox

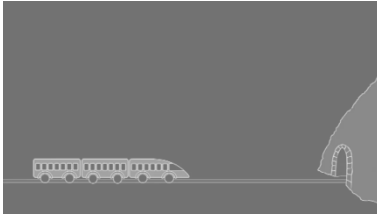
De opgaven 55 en 56 behandelen de zogeheten *trein-en-tunnelparadox*.

55 Een trein en een tunnel zijn precies even lang. De trein rijdt op de tunnel af, zoals in figuur 64.

- a Leg uit of de trein in de tunnel past volgens een waarnemer langs de rails.
- b Krimpt de tunnel volgens een waarnemer langs de rails?

De trein rijdt weer op de tunnel af.

- c Leg uit of de trein in de tunnel past volgens een waarnemer in de trein.

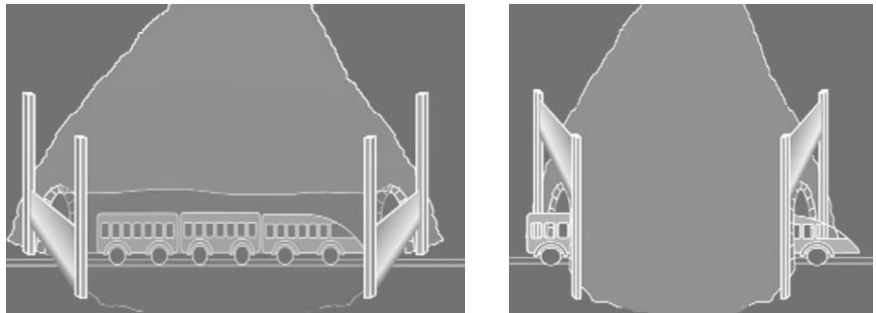


Figuur 64

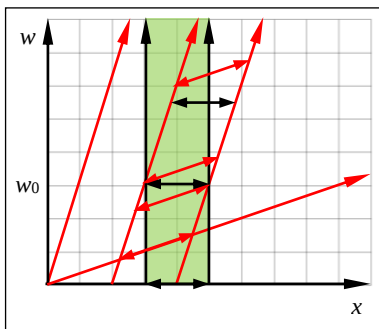
d Krimpt de trein volgens een waarnemer in de trein?

56 We bekijken de trein en de tunnel nog een keer. De trein en de tunnel zijn precies even lang. De trein rijdt met grote snelheid op de tunnel af. De stilstaande waarnemer ziet een gekrompen versie van de trein, die volgens hem precies in de tunnel past. Voor de waarnemer in de trein is juist de tunnel gekrompen en de trein niet, dus volgens haar past de trein met geen mogelijkheid in de tunnel. Hoe bepalen we wie er gelijk heeft: past die trein nou wel of niet in de tunnel?

We maken de situatie iets heftiger door aan beide kanten van de tunnel een guillotine te plaatsen, zoals in figuur 65. Beide guillotines vallen tegelijkertijd neer. In het railsstelsel blijft de trein heel, en in het treinstelsel worden de voor- en achterkant van de trein gehakt. De waarnemer langs de rails kan samen met de waarnemer in de trein (nadat ze is uitgestapt) controleren wat de staat van de trein is.



Figuur 65 – Het railsstelsel (links) en het treinstelsel (rechts).



Figuur 66 – Past de trein wel of niet in de tunnel?

Het ruimtetijd diagram van figuur 66 geeft aan wat er aan de hand is. In het zwarte ruststelsel correspondeert het groene gebied met de stilstaande tunnel: de omhoogwijzende zwarte pijlen zijn de wereldlijnen van de voor- en achterkant van de (eendimensionale) tunnel. De trein, de tweepuntige pijl, beweegt met een constante snelheid in de positieve x -richting en is in rust met betrekking tot het rode stelsel. De twee meest rechtse schuin omhoog lopende rode lijnen zijn de wereldlijnen die corresponderen met de beide uiteinden van de trein.

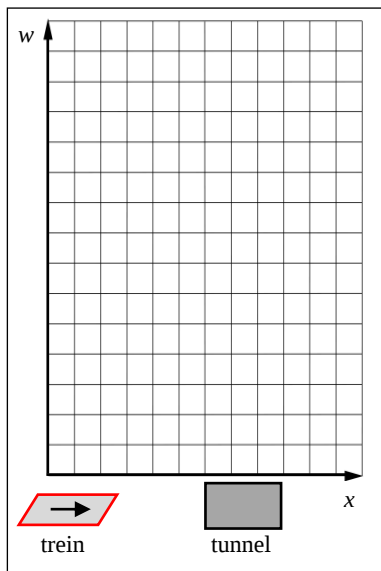
- a Teken de gebeurtenis 'guillotine aan de voorkant' slaat dicht en de gebeurtenis 'guillotine aan de achterkant' slaat dicht' in het ruimtetijd diagram (deze vinden in het zwarte railsstelsel gelijktijdig plaats op tijdstip w_0).
- b Vindt de gebeurtenis 'guillotine aan de voorkant slaat dicht' voor, na of tegelijkertijd met de gebeurtenis 'guillotine aan de achterkant' slaat dicht' plaats voor een waarnemer in de trein?
- c De trein blijft heel. Welke verklaring geeft de waarnemer langs de rails hiervoor?
- d De trein blijft heel. Welke verklaring geeft de waarnemer in de trein hiervoor?

57 De belangrijkste reden dat een voorwerp verkort wordt waargenomen in een stelsel waarin het voorwerp beweegt, in vergelijking met het ruststelsel, is dat... (kies het juiste antwoord):

- A als een voorwerp met relativistische snelheid beweegt er een kracht werkt die het voorwerp samendrukt.
- B gebeurtenissen niet in ieder stelsel gelijktijdig zijn.
- C de liniaal die in het bewegende stelsel wordt gebruikt lengtekrimp ondervindt.
- D de klokken in het bewegende stelsel trager lopen.

58 Een hogesnelheidstrein gaat met een constante snelheid $v = \frac{2}{3} \cdot c$ door een tunnel.

Op $w = 0$ is de voorkant van de trein op $x = 3 \text{ ls}$ en de achterkant op $x = 0 \text{ ls}$.



Figuur 67

De achterkant van de tunnel bevindt zich op $x = 6$ ls en de voorkant van de tunnel op $x = 9$ ls.

- a Teken de wereldlijnen van de voorkant en de achterkant van de tunnel in het ruimtetijd diagram van figuur 67.
 - b Past de trein in de tunnel voor een waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel? Licht je antwoord toe met behulp van het ruimtetijd diagram.
 - c Past de trein in de tunnel voor een waarnemer in de trein? Licht je antwoord toe met behulp van het ruimtetijd diagram.
- 59 Je bent op weg naar Jupiter in een raket. Je neemt een liniaal mee van 30 cm. Een waarnemer op aarde zegt dat de liniaal maar 20 cm is.
- a Hoe lang zeg jij dat de liniaal is?
 - b Welke snelheid heeft de raket?

- 60 Je vriend Albert springt in een raket en raast weg met een snelheid $v = 0,6 \cdot c$ ten opzichte van de aarde om de ster Sirius te bezoeken. Sirius staat op een afstand van 12 lichtjaar. Jij blijft op aarde.

- a Laat met een berekening zien dat Albert volgens jou 20 jaar onderweg is geweest om van de aarde naar Sirius te gaan.

Jij en Albert bewegen ten opzichte van elkaar met relativistische snelheid. Daarom zijn jullie het niet eens over de reisduur.

- b Bereken hoe lang de reis duurt volgens Albert. Gebruik de formule voor tijdsrek.

Albert is niet verbaasd over jouw antwoord bij vraag b. Hij meet namelijk een andere afstand aarde-Sirius dan jij doet.

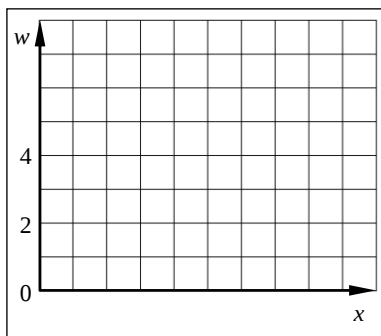
- c Bereken hoe groot de afstand aarde-Sirius is volgens Albert. Gebruik de formule voor lengtekrimp.
- d Bereken met behulp van jouw antwoord op vraag c hoe lang de reis duurt volgens Albert.
- e Leg uit dat jij en Albert het eens zijn over de reisduur die Albert zal meten, maar dat jullie het oneens zijn over de reden waarom dit zo is.

- 61 Neem een zwart en een rood stelsel. Bob is in rust in het rode stelsel, Alice in het zwarte stelsel. Bob beweegt met een snelheid $v = 0,6 \cdot c$ ten opzichte van het zwarte stelsel.

- a Teken dit in figuur 68.
- b Neem het tijdstip $t = 5$. Geef aan op welke plaats in het zwarte stelsel Bob zich dan bevindt.
- c Bereken de tijd die Bob's klok aangeeft op $t = 5$.

Voor Bob beweegt Alice met een snelheid $v = -0,6 \cdot c$.

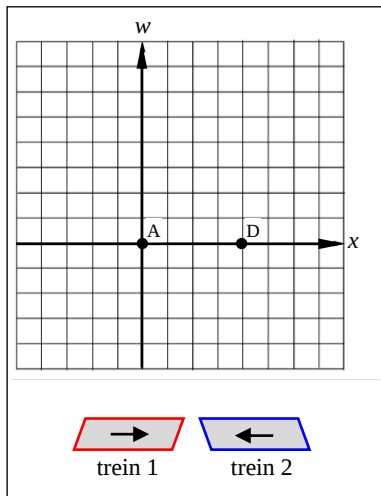
- d Bereken de plaats van Alice in Bob's stelsel op je bij vraag c gevonden tijdstip.
- e Vergelijk Bob's plaats op $t = 5$ met je antwoord op vraag d en trek een conclusie.



Figuur 68

- 62 Een lange meetlat wordt in de lege ruimte geplaatst in een inertiaalstelsel dat we het meetlatstelsel noemen. Voor het vertrek is in stilstand op aarde gemeten dat een raket een lengte heeft van 100 m. Deze raket beweegt met een snelheid $v = 0,8 \cdot c$ ten opzichte van de meetlat. Twee bemanningsleden staan stil aan de uiteinden van de raket. Zij zijn uitgerust met messen en gesynchroniseerde horloges. Op een afgesproken tijdstip steken de bemanningsleden hun hoofd buiten de raket en snijden de meetlat tegelijkertijd door.

- a Wat is de lengte van de raket volgens de bemanningsleden in de voortrazende raket?
- b Wat is de lengte van de raket volgens de waarnemers langs de meetlat (zij zijn in rust ten opzichte van de meetlat).
- c Hoe lang is het afgesneden deel van de meetlat volgens de waarnemers in het meetlatstelsel?



Figuur 69

- 63** Twee ééndimensionale treinen komen op elkaar af. Voor een waarnemer langs de rails gaat trein 1 met een snelheid $v = \frac{1}{3}c$ naar rechts en trein 2 met een snelheid $v = \frac{1}{3}c$ naar links. Op $w = 0$ is D de voorkant van trein 1 en A de achterkant van trein 1, gemeten in het stilstaande stelsel langs de rails. Op $w = 0$ is A de voorkant van trein 2 en D de achterkant van trein 2, gemeten in het stilstaande stelsel. Dit is voor de waarnemer langs de rails het moment van passeren: de treinen zijn op hetzelfde moment op dezelfde plaats.
- Teken in figuur 69 de wereldlijnen van de voor- en achterkant van trein 1. Doe dit ook voor trein 2.
 - Teken de x' -as van een waarnemer die op $w = 0$ achterin trein 1 zit. (Deze as gaat dus door A.)
 - Teken de x'' -as van een waarnemer die op $w = 0$ voorin trein 2 zit. (Deze as gaat dus ook door A.)
 - Teken de lengte van trein 1, gemeten in het stelsel van trein 1. (In dat stelsel is trein 1 in rust.) Noem deze lengte AC in het ruimtetijddiagram.
 - Teken de lengte van trein 2, gemeten in het stelsel van trein 1. (In dat stelsel beweegt trein 2.) Doe dit op hetzelfde moment als in vraag d. Noem deze lengte AB in het ruimtetijddiagram.
 - Welke trein is korter in het stelsel van trein 1: de bewegende trein 2 of de stilstaande trein 1? Leg uit.
 - Teken de lengte van trein 2, gemeten in het stelsel van trein 2. (In dat stelsel is trein 2 in rust.) Noem deze lengte AF in het ruimtetijddiagram.
 - Teken de lengte van trein 1, gemeten in het stelsel van trein 2. (In dat stelsel beweegt trein 1.) Doe dit op hetzelfde moment als in vraag f. Noem deze lengte AE in het ruimtetijddiagram.
 - Welke trein is korter in het stelsel van trein 2: de bewegende trein 1 of de stilstaande trein 2? Leg uit.